



EL RESIDUO DE LA FUNCIÓN GENERALIZADA $(M \pm i0)^\lambda$.

THE RESIDUE FROM THE GENERALIZED FUNCTION $(M \pm i0)^\lambda$.

Manuel A. Aguirre¹ y Emilio Aguirre Rébora

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada (NuCOMPA)
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro Tandil, Argentina.
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 04-Marzo-2015; aceptado/accepted: 18-Mayo-2015)

RESUMEN

Sea $M = M(x_1, \dots, x_n)$ una forma cuadrática definida en (18), en este artículo se define la distribución $(M \pm i0)^\lambda$ y se encuentra el residuo en $\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}$, $m = 1, 2, \dots$ y $k = 0, 1, 2, \dots$ como consecuencia se obtiene la propiedad $F_{-2km}^\pm = L_a^k \{\delta(x)\}$ (ver fórmula (42)), donde F_a^\pm es la familia de funciones distribucionales definida por (35) y L_a^k es el operador definido por (39) y L_a^k es la distribución delta de Dirac.

Finalmente usando la transformada de Fourier de F_a^\pm se le da un sentido al producto de convolución (ver fórmula (59)). Los resultados obtenidos en este artículo son generalizaciones de fórmulas que aparecen en ([1], página 353, ([2])) y ([3]) página 346, fórmula 5.4.

Clasificación según AMS: 46F10

Palabras Claves: Distribución; Residuo; Transformada de Fourier.

ABSTRACT

Let $M = M(x_1, \dots, x_n)$ be a quadratic form defined by (18), in this paper we defined the distributions $(M \pm i0)^\lambda$ and find the residue at $\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}$, $m = 1, 2, \dots$ and $k = 0, 1, 2, \dots$. As consequences we obtain the propertie $F_{-2km}^\pm = L_a^k \{\delta(x)\}$ (c.f. formula (42)), where F_a^\pm is the distributional family defined by (35) and L_a^k is the operator defined by (39) and $\delta(x)$ is the distribution of Dirac delta.

Finally using the Fourier transform of the distributional F_a^\pm are give a sense to the convolution product $L_a^k \{\delta(x)\} * L_a^l \{\delta(x)\}$. (c.f. formula (59)). Our results are generalization of formulae that appear in ([1], page 353, ([2])) and ([3]) page 346, formula 5.4.

AMS Subject Classification: 46F10

Keywords: Distributions; Residue; Fourier Transform.

¹ This work was partially supported by Comisión de Investigaciones Científicas de la Pcia. de Buenos Aires (C.I.C.) Argentina.

EL RESIDUO DE $(\gamma_1 x_1^2 + \dots + \gamma_n x_n^2)^m$

Sea

$$P = P(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j x_j^2 \right)^m \tag{1}$$

una forma cuadrática con coeficientes complejos, y sea la parte imaginaria de P , $\text{Im } P$ una forma cuadrática definida positiva, es decir, $\text{Im } \gamma_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$,

$$\gamma_j = i b_j \tag{2}$$

con $b_j > 0$.

Entonces para toda función de prueba φ en el espacio K donde K es el conjunto de funciones C^∞ con soporte compacto ([1], página 2), se tiene,

$$(P^\lambda, \varphi) = \int \left[\sum_{j=1}^n \gamma_j x_j^2 \right]^{m\lambda} \varphi(x) dx = e^{\frac{\lambda \pi i m}{2}} \int \left(\sum_{j=1}^n b_j x_j^2 \right)^{m\lambda} \varphi(x) dx \tag{3}$$

Haciendo

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1}{\sqrt{b_1}} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{y_n}{\sqrt{b_n}} \end{aligned} \tag{4}$$

En (3), se tiene,

$$(P^\lambda, \varphi) = \frac{e^{\frac{\lambda \pi i m}{2}}}{\sqrt{b_1} \dots \sqrt{b_n}} \int \rho^{2m\lambda} \varphi_1(y) dy \tag{5}$$

donde

$$\rho^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2 \tag{6}$$

y

$$\varphi_1(y_1, \dots, y_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n). \tag{7}$$

Ahora, sabemos que la funcional $(r^{2\lambda}, \varphi)$ ([1], capítulo I, sección 3.9), tiene singularidades en los puntos $2\lambda = -n - 2k$, por tanto la funcional $(\rho^{2\lambda m}, \varphi)$, tiene polos simples en los puntos $\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}$.

Para $k = 0$ encontramos la siguiente fórmula, ([1], página 73 y [6], página 792)

$$\text{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2m}} r^{2\lambda m} = \frac{1}{2m} \text{Res}_{\beta = -n} r^\beta = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2m\Gamma(\frac{n}{2})} \delta(x) \tag{8}$$

Por tanto de (5) usando (8), se tiene

$$\operatorname{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2m}} P^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n}{4}}}{\sqrt{b_1} \dots \sqrt{b_n}} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(2m)\Gamma(\frac{n}{2})} \delta(x). \quad (9)$$

Vamos a encontrar el residuo de P^λ en los otros puntos.
Para este propósito consideremos el operador diferencial

$$L_\gamma = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad (10)$$

donde

$$\gamma_j = ib_j, \quad b_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Por cálculo directo se obtiene la siguiente relación

$$L_\gamma P^{\lambda + \frac{1}{m}} = 2^2 (m\lambda + 1)(m\lambda + \frac{n}{2}) P^\lambda. \quad (12)$$

Iterando l veces se obtiene la siguiente relación

$$L_\gamma^l \{P^{\lambda + \frac{l}{m}}\} = 2^{2l} (m\lambda + 1) \dots (m\lambda + l)(m\lambda + \frac{n}{2}) \dots (m\lambda + \frac{n}{2} + l - 1) P^\lambda. \quad (13)$$

Haciendo $l = km, m = 1, 2, \dots$ en (13) se obtiene

$$L_\gamma^{km} \{P^{\lambda + k}\} = 2^{2km} (m\lambda + 1) \dots (m\lambda + km)(m\lambda + \frac{n}{2}) \dots (m\lambda + \frac{n}{2} + km - 1) P^\lambda. \quad (14)$$

De (14), se tiene

$$P^\lambda = \frac{1}{2^{2km} (m\lambda + 1) \dots (m\lambda + km)(m\lambda + \frac{n}{2}) \dots (m\lambda + \frac{n}{2} + km - 1)} L_\gamma^{km} \{P^{\lambda + k}\} \quad (15)$$

y consecuentemente

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-k} P^\lambda = \frac{1}{2^{2km} (m\lambda+1)\dots(m\lambda+km)(m\lambda+\frac{n}{2})\dots(m\lambda+\frac{n}{2}+km-1)} \Big|_{\lambda=-\frac{n}{2m}-k}$$

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-k} L_\gamma^{km} \{P^{\lambda+k}\} =$$

$$= \frac{1}{2^{2km} (m(-\frac{n}{2m}-k))\dots(m(-\frac{n}{2m}-k)+km)(m(-\frac{n}{2m}-k)+\frac{n}{2})\dots(m(-\frac{n}{2m}-k)+\frac{n}{2}+km-1)} \tag{16}$$

$$\operatorname{Res}_{\beta=-\frac{n}{2m}} L_\gamma^{km} P^\beta$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{2km} (-1)^{mk} \Gamma(\frac{n}{2}+mk)} \frac{1}{(-1)^{mk} (mk)!} \operatorname{Res}_{\beta=-\frac{n}{2m}} L_\gamma^{km} P^\beta$$

luego, insertando (9), se llega a la siguiente fórmula

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2m}-k} P^\lambda = \frac{e^{-\frac{\pi n}{4}} 2\pi^2 \Gamma(\frac{n}{2}) L_\gamma^{km} \{\delta\}}{2^{2km} \Gamma(\frac{n}{2}+mk) (km)! \sqrt{b_1} \dots \sqrt{b_n} \Gamma(\frac{n}{2})(2m)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi n}{4}} 2\pi^2 L_\gamma^{km} \{\delta\}}{(2m) 2^{2km} \Gamma(\frac{n}{2}+mk) (km)! \sqrt{b_1} \dots \sqrt{b_n}} = \frac{e^{-\frac{\pi n}{4}} 2\pi^2 L_\gamma^{km} \{\delta\}}{(2m) 2^{2km} \Gamma(\frac{n}{2}+mk) (km)! \sqrt{-i\alpha_1} \dots \sqrt{-i\alpha_n}} \tag{17}$$

LAS FUNCIONES GENERALIZADAS $(M+i0)^\lambda$ Y $(M-i0)^\lambda$

Sea

$$M = M(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j^2 \right)^m \tag{18}$$

una forma cuadrática no degenerada con coeficientes reales. Entonces podemos definir distribuciones análogas a $(x+i0)^\lambda$ y $(x-i0)^\lambda$ ([1], capítulo I, sección 3) las cuales podrían llamarse $(M+i0)^\lambda$ y $(M-i0)^\lambda$.

Para este propósito vamos a considerar la forma cuadrática

$$G = M + iM' \tag{19}$$

donde M' es una forma cuadrática definida positiva (con coeficientes reales).

Sabemos de ([1], página 275) que cuando los coeficientes de M' convergen a cero, la función generalizada $(M+iM')^\lambda$ converge y su valor de convergencia es decir su límite está bien definido. Este límite lo llamaremos $(M+i0)^\lambda$; es decir por definición se tiene que

$$(M+i0)^\lambda = \lim_{M' \rightarrow 0} (M+iM')^\lambda \tag{20}$$

En forma similar, se define la función generalizada $(M - i0)^\lambda$ como el límite de la función generalizada $(M - iM')^\lambda$ cuando los coeficientes de M' convergen a cero, donde M' es una forma cuadrática definida positiva, es decir, por definición se tiene,

$$(M - i0)^\lambda = \lim_{M' \rightarrow 0} (M - iM')^\lambda. \quad (21)$$

De las definiciones de $(M + i0)^\lambda$ y $(M - i0)^\lambda$ podemos deducir que ellas son analíticas en λ en todo punto excepto en $\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}$, donde k es un entero no negativo.

De (17) las distribuciones $(M + i0)^\lambda$ y $(M - i0)^\lambda$ tienen polos simples con residuo dado por

$$\operatorname{Res} (M + i0)^\lambda = \lim_{M' \rightarrow 0} \operatorname{Res} (M + iM')^\lambda \quad (22)$$

$$\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m} \qquad \lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}$$

y

$$\operatorname{Res} (M - i0)^\lambda = \lim_{M' \rightarrow 0} \operatorname{Res} (M - iM')^\lambda. \quad (23)$$

$$\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m} \qquad \lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}$$

En orden de encontrar el residuo, necesitamos solamente encontrar el límite cuando M' converja a cero de $\sqrt{-i\gamma_1} \sqrt{-i\gamma_2} \dots \sqrt{-i\gamma_n}$.

Sin perder generalidad podemos asumir que M' es de la forma

$$M' = \varepsilon(|x|^2)^m = \varepsilon(x_1^2 + \dots + x_n^2)^m. \quad (24)$$

Usando que

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} \arg z}, \quad -\pi < \arg < \pi,$$

([1], página 273), donde z es un número complejo, se tiene

$$\sqrt{-i\gamma_1} \sqrt{-i\gamma_2} \dots \sqrt{-i\gamma_n} = \sqrt{|\gamma_1 \dots \gamma_n|} e^{-\frac{n\pi i}{4}}. \quad (25)$$

$$e^{\frac{i}{2} \arg \gamma_1} \dots e^{\frac{i}{2} \arg \gamma_p} \dots e^{\frac{i}{2} \arg \gamma_{p+1}} \dots e^{\frac{i}{2} \arg \gamma_{p+q}}.$$

Supongamos que el autovalor p es positivo y el autovalor q es negativo, donde $p + q = n$ es la dimensión del espacio negativo. Entonces cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, de (25) se llega a la expresión

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{-i\gamma_1} \sqrt{-i\gamma_2} \dots \sqrt{-i\gamma_n} = e^{\frac{q\pi i}{2}} \sqrt{|a_1 \dots a_p \dots a_{p+q}|} e^{-\frac{n\pi i}{4}} = e^{\frac{q\pi i}{2}} \sqrt{|\Delta|} e^{-\frac{n\pi i}{4}} \quad (26)$$

donde Δ es el determinante de los coeficientes de M .

Ahora usando la ecuación (17) para expresar el residuo de G^λ en $\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}$, lo cual nos da

$$\operatorname{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}} (M + i0)^\lambda = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(2m)2^{2k} \Gamma(\frac{n}{2} + k) k! e^{\frac{q\pi}{2}} \sqrt{|\Delta|}} L_\gamma^k \{\delta\} \quad (27)$$

donde

$$L_\gamma = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}. \quad (28)$$

En forma similar se obtiene

$$\operatorname{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2m} - \frac{k}{m}} (M - i0)^\lambda = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(2m)2^{2k} \Gamma(\frac{n}{2} + k) k! e^{-\frac{q\pi}{2}} \sqrt{|\Delta|}} L_\gamma^k \{\delta\}. \quad (29)$$

Nosotros observamos que L_γ puede ser escrito en la siguiente forma

$$L_\gamma = L_a = \frac{1}{a_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{1}{a_p} \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{1}{a_{p+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} + \dots + \frac{1}{a_{p+q}} \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \quad (30)$$

si $a_1, \dots, a_p > 0$ y $a_{p+1}, \dots, a_{p+q} < 0$.

En particular si

$$\begin{aligned} a_1 = \dots = a_p &= 1 \\ & \text{y} \\ a_{p+1} = \dots = a_{p+q} &= -1 \end{aligned} \quad (31)$$

y $m = 1$, de (27) y (29), se obtiene la fórmula

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2} - k} (x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \pm i0)^\lambda &= \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n}{2} + k) e^{\pm \frac{q\pi}{2}}} L^k \delta \end{aligned} \quad (32)$$

donde

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}. \quad (33)$$

la fórmula (32) aparece en ([1], página 353).

Haciendo $k = sm, m = 1, 2, \dots$ la fórmulas (27) y (29) pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$\operatorname{Re} s (M \pm i0)^\lambda = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(2m)2^{2sm} \Gamma(\frac{n}{2} + sm)(sm)! e^{\pm \frac{q\pi}{2}} \sqrt{|\Delta|}} L_\gamma^{sm} \{\delta\} \quad (34)$$

LA DISTRIBUCIÓN $F_{-2km}^\pm (M \pm i0, m, n)$

Sea $F_\alpha^\pm = F_{\alpha, m, n}^\pm = F_{\alpha, m, n}^\pm (M \pm i0, m, n)$ la familia de funciones distribucionales definidas por

$$F_\alpha^\pm (M \pm i0, m, n) = A_{\alpha, n}^\pm (M \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}} \quad (35)$$

Donde

$$A_{\alpha, n}^\pm = \frac{e^{\frac{\alpha\pi}{2}} \Gamma(\frac{n-\alpha}{2}) \sqrt{|\Delta|}}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} e^{\pm \frac{q\pi}{2}} \quad (36)$$

$(M \pm i0)^\lambda$ son definidas por (20) y (21), Δ es el determinante de los coeficientes de $M(x_1 \dots x_n)$ y $\Gamma(\frac{\alpha}{2})$ es la función gama. La familia F_α^\pm aparece en ([3]).

Tomando en cuenta que $(M \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}$ tiene polos simples en $\alpha = -2km$, y considerando que la función $\Gamma(\frac{\alpha}{2})$ tiene polos simples en los mismos puntos, donde $k = 0, 1, 2, \dots$ y $m = 1, 2, \dots$ se tiene,

$$\begin{aligned} F_{-2km, m, n}^\pm (M \pm i0, m, n) &= \lim_{\alpha \rightarrow -2km} F_{\alpha, m, n}^\pm = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -2km} \frac{e^{\frac{\alpha\pi}{2}} \Gamma(\frac{n-\alpha}{2}) \sqrt{|\Delta|}}{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}}} e^{\pm \frac{q\pi}{2}} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow -2km} \frac{(M \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \\ &= \frac{e^{km\pi} \Gamma(\frac{n}{2} + km)}{2^{-2km} \pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow -2km} \frac{(\alpha + 2km)(M \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}}{(\alpha + 2km)\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \\ &= \frac{e^{km\pi} \Gamma(\frac{n}{2} + km)}{2^{-2km} \pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\sqrt{|\Delta|} e^{\pm \frac{q\pi}{2}} \operatorname{Res} (M \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}_{\alpha=-2km}}{\lim_{\alpha \rightarrow -2km} (\alpha + 2km)\Gamma(\frac{\alpha}{2})}. \end{aligned} \quad (37)$$

Usando la fórmula (34), se tiene,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s (M \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2m}}_{\alpha=-2km} &= (2m) \operatorname{Re} s (M \pm i0)^\lambda_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} = \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} L_a^{km} \{\delta\}}{2^{2km} \Gamma(\frac{n}{2} + km)(km) \sqrt{|\Delta|} e^{\pm \frac{q\pi}{2}}} \end{aligned} \quad (38)$$

donde

$$L_a = \frac{1}{a_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{1}{a_p} \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{1}{a_{p+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{1}{a_{p+q}} \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \quad (39)$$

si $a_1, \dots, a_p > 0$ y $a_{p+1}, \dots, a_{p+q} < 0$.

Ahora usando la fórmula

$$\operatorname{Res}\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!} \quad (40)$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -2km} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\alpha + 2km) &= 2 \lim_{\alpha \rightarrow -2km} \left(\frac{\alpha}{2} + km\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2 \lim_{z \rightarrow -km} (z + km)\Gamma(z) = \frac{2(-1)^{km}}{(km)!}. \end{aligned} \quad (41)$$

De (37) y usando (38) y (41) se obtiene la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} F_{-2km}^{\pm} &= F_{-2km, m, n}^{\pm} = \frac{e^{\frac{km\pi i}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + km\right) \sqrt{|\Delta|}}{2^{-2km} \pi^{\frac{n}{2}}} e^{\pm \frac{q\pi i}{2}} \\ &\cdot \frac{(km)!}{2^{(-1)^{km}}} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} L_a^{km} \delta}{2^{2km} \Gamma\left(\frac{n}{2} + km\right) (km)! \sqrt{|\Delta|} e^{\pm \frac{q\pi i}{2}}} \\ &= L_a^{km} \{\delta(x)\}. \end{aligned} \quad (42)$$

En particular si $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 1, a_{p+1} = \dots = a_{p+q} = -1$ y $m = 1$, se tiene

$$F_{-2k} = F_{-2k, m, n}(M \pm i0, m, n) = L^k \delta \quad (43)$$

donde

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \quad (44)$$

EL PRODUCTO DE CONVOLUCIÓN $L_a^k \{\delta\} * L_a^l \{\delta\}$

Sabemos que la siguiente fórmula es válida ([3]):

$$\mathcal{F}\{F_{\beta, n}^{\pm}\} = e^{\frac{\beta\pi i}{2}} (N(s_1, \dots, s_n) \mp i0)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad (45)$$

donde ([3]):

$$N(s_1, \dots, s_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} s_j^2, \quad (46)$$

y $\mathcal{F}\{f\}$ es la transformada de Fourier definida por

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(y) = \int e^{-i\langle x, y \rangle} f(x) dx. \quad (47)$$

Haciendo $\beta = -km$ en (45), se obtiene la transformada de Fourier de F_{-2km}^{\pm} ,

$$\mathcal{F}\{F_{-2km}^{\pm}\} = e^{-km\pi i} (c_1 s_1^2 + \dots + c_n s_n^2 \mp i0)^{km} \quad (48)$$

donde $c_j = \frac{1}{a_j}$.

De (48) y considerando (42), se tiene,

$$\mathcal{F}\{L_a^{km} \delta\} = e^{-km\pi i} (c_1 s_1^2 + \dots + c_n s_n^2 + i0)^{km} \quad (49)$$

si $a_1, \dots, a_p > 0$ y $a_{p+1}, \dots, a_{p+q} < 0$.

Por otra parte usando las definiciones (20) y (21) se tiene,

$$(M + i0)^{km} = M_+^{km} + e^{km\pi i} M_-^{km} = M_+^{km} + (-1)^{km} M_-^{km} \quad (50)$$

y

$$(M - i0)^{km} = M_+^{km} + e^{-km\pi i} M_-^{km} = M_+^{km} + (-1)^{km} M_-^{km} \quad (51)$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots$ $m = 1, 2, \dots$,

$$M_+^\lambda \begin{cases} M^\lambda & \text{if } M > 0 \\ 0 & \text{if } M \leq 0 \end{cases} \quad (52)$$

y

$$M_-^\lambda \begin{cases} (-M)^\lambda & \text{if } M > 0 \\ 0 & \text{if } M \leq 0. \end{cases} \quad (53)$$

Ahora escribiendo por definición

$$M^{km} = M_+^{km} + (-1)^{km} M_-^{km}, \quad (54)$$

De (49) y usando (50), (51) y (54) se obtiene la siguiente fórmula

$$\mathcal{F}\{L_a^{km} \delta\} = (-1)^{km} M^{km} = (-1)^{km} (c_1 s_1^2 + \dots + c_n s_n^2)^{km} \quad (55)$$

si $a_1, \dots, a_p > 0$ y $a_{p+1}, \dots, a_{p+q} < 0$; $c_j = \frac{1}{a_j}$, y L_a es definido por (30).

En particular si $m = 1$, $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 1$ y $a_{p+1} = \dots = a_{p+q} = -1$ en (55) se tiene,

$$\mathcal{F}\{L^k \delta\} = (-1)^k (s_1^2 + \dots + s_p^2 - s_{p+1}^2 - \dots - s_{p+q}^2)^k, \quad (56)$$

donde L está definido por (44).

La fórmula (56) aparece en ([2], página 23)

Ahora tomando en cuenta que $L_a^{km} \delta$ está en el espacio \mathcal{O}^c donde \mathcal{O}^c es el espacio de distribuciones de rápido decrecimiento ([5], p.244) y considerando el clásico teorema de

Laurent Schwartz ([5], página 268, fórmula (IV, 8.5)), se concluye la validez de la siguiente fórmula

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{L_a^{km} \delta\} * L_a^{lm} \{\delta\} &= \mathcal{F}\{L_a^k \delta\} \cdot \mathcal{F}\{L_a^l \delta\} = \\
 &= (-1)^{km} (-1)^{lm} (c_1 s_1^2 + \dots + c_n s_n^2)^{km} (c_1 s_1^2 + \dots + c_n s_n^2)^{lm} \\
 &= (-1)^{(k+l)m} (c_1 s_1^2 + \dots + c_n s_n^2)^{(k+l)m} \\
 &= \mathcal{F}\{L_a^{m(k+l)} \delta\} .
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

De (57), se concluye la siguiente propiedad:

$$L_a^{km} \{\delta\} * L_a^{lm} \{\delta\} = L_a^{m(k+l)} \{\delta\} . \tag{58}$$

En particular si $m = 1, a_1, \dots, a_p = 1, a_{p+1} = \dots = a_{p+q} = -1$, de (58) se obtiene la fórmula

$$L^k \{\delta\} * L^l \{\delta\} = L^{k+l} \{\delta\} \tag{59}$$

donde L es el operador definido por (44).

La fórmula (59) aparece en ([4]), página 346.

REFERENCIAS

- [1] I.M.Gelfand and G.E.Shilov., Generalized Functions, Vol.I, Academic Press, New York, 1964.
- [2] S.E. Trione, Distributional Product, Cursos de Matemática, N°3, serie II, I.A.M.-CONICET, Argentina 1981.
- [3] Manuel A.Aguirre., The Fourier transform of $((\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2)^m \pm i0)^\lambda$ International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 64, No. 3, 2010, pp. 389-397.
- [4] Manuel A. Aguirre T. , The distribution $\delta^{(k)}(P \pm i0 - m^2)$, Journal of Computational and Applied Mathematics 88 (1977) pp. 339-348.
- [5] Laurent Schwartz, Theorie des distributions, Hermann, Paris 1966.
- [6] Manuel A. Aguirre T., A convolution product of $(2j)$ th derivative of Dirac's delta in r and multiplicative r^{-k} and $\nabla(\Delta^j \delta)$, International Journal of Mathematics and Mathematical Science.



Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar