Revista Científica
Vol. 25, No. 02, pp. 70-79/Diciembre 2012

ISSN-L 1818-6742

http://www.lamjol.info/index.php/NEXO

El producto distribucional entre la parte finita de P_+^λ en $\lambda=-l$ y $\lambda=-\frac{n}{2}-s,$ de la derivada $k-$ ésima de la delta de Dirac en un hipercono.

Manuel A. Aguirre*

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Tandil, Provincia de Buenos Aires, Argentina
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(Recibido/received: 24-Septiembre-2012; aceptado/accepted: 06-Noviembre-2012)

RESUMEN

Sea $P = P(x_1,\ldots.,x_n)$ una forma cuadrática en n variables definida por (1) y sea P_+^λ la distribución definida por (3) donde λ es un número complejo. Usando el desarrollo en serie de Laurent de P_+^λ y considerando las signaturas (p,q) de $P(x)$, damos un sentido a los productos distribucionales $P_+^{-l}.\delta^{(k)}(P_+), P_+^{-\frac{n}{2}-h}.L^s\{\delta(P_+)\}$ y $P_+^{-\frac{n}{2}-s}.\delta^{(\frac{n}{2}+h-1)}(P_+)$, donde $P_+^{-\gamma}, P_+^{-\frac{n}{2}-t}$ significa parte finita de P_+^λ en $\lambda=-r, r=1,2,\ldots$ y $\lambda=-\frac{n}{2}-t, t=1,2,..,t=0,1,..,\delta^{(r)}(P_+)$ es definida por (13) y L^s es un operador homogéneo iterado s veces definido por (18).

Palabras Clave: Teoría de distribuciones; propiedades de distribuciones; convolución de distribuciones.

ABSTRACT

Let $P = P(x_1,\ldots.,x_n)$ be a quadratic form in n variables defined by (1) and let P_+^λ be the distribution defined by (3) where λ is a complex number. Using the Laurent series of P_+^λ and considering the signature (p,q) of $P(x)$ we given a sense to distributional products $P_+^{-l}.\delta^{(k)}(P_+), P_+^{-\frac{n}{2}-h}.L^s\{\delta(P_+)\}$ and $P_+^{-\frac{n}{2}-s}.\delta^{(\frac{n}{2}+h-1)}(P_+)$, where $P_+^{-\gamma}, P_+^{-\frac{n}{2}-t}$ we means finite part of P_+^λ at $\lambda=-r, r=1,2,\ldots$ and $\lambda=-\frac{n}{2}-t, t=1,2,..,t=0,1,..,\delta^{(r)}(P_+)$ is defined by (13) and L^s si a linear homogeneous differential operator iterated s-times defined by (18).

Keywords: Theory of distributions, properties of distributions, convolution of distributions.

* Este trabajo es parcialmente soportado por la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (C.I.C.), Argentina.

INTRODUCCIÓN

Sea $(x_1,...,x_p,x_{p+1},...,x_{p+q})$ un punto en el espacio $n-$ dimensional Euclideano R^n , donde $p+q=n.$ Consideremos una forma cuadrática en n variables definida por

$$P=P(x)=x_1^2+...+x_p^2-x_{p+1}^2-...-x_{p+q}^2. \qquad (1)$$

La hipersuperficie $P=0$ es un hipercono con un punto singular (el vértice) en el origen. Llamamos C_0^∞ al espacio $\varphi(x)$ de funciones infinitamente derivables y con soporte compacto definidas de R^n a $\mathrm{R}.$

De ([1], página 253) la distribución asociada a P_+^λ es definida por

$$(P_+^\lambda,\varphi)=\int_{P>0}(P(x))^\lambda\varphi(x)dx, \qquad (2)$$

donde $(x_1,...,x_p,x_{p+1},...,x_{p+q}),\lambda$ es un número complejo y $dx=dx_1...dx_p dx_{p+1}...dx_{p+q}.$

Para $\operatorname{Re}al(\lambda)\geq 0$ esta integral converge y es una función analítica de $\lambda.$ La prolongación analítica a la parte $\operatorname{Re}al(\lambda)<0$ puede ser usada para extender la definición de $(P_+^\lambda,\varphi).$
De (2.) y tomando en cuenta (([1], páginas 254 y 255] se tiene

$$(P_+^\lambda,\varphi)=\int_0^\infty u^{\lambda+((p+q)/2)-1}G(\lambda,u)du, \qquad (3)$$

donde

$$G(\lambda,u)=\frac{1}{4}\int_0^1(1-t)^\lambda t^{(q-2p)}\Psi_1(u,tu)dt, \qquad (4)$$

$$\Psi_1(u,tu)=\Psi(r,s), \qquad (5)$$

$$\Psi(r,s)=\int\varphi d\Omega^{(p)}d\Omega^{(q)}, \qquad (6)$$

$d\Omega^{(p)}$ y $d\Omega^{(q)}$ son elementos de áreas de la superficie en la esfera unitaria en R^p and R^q respectivamente.
Consecuentemente, (P_+^λ,φ) tiene dos conjuntos de singularidades, a saber,

$$\lambda=-1,-2,..,-k... \qquad (7)$$

y

$$\lambda=-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}-1...-\frac{n}{2}-h,... \qquad (8)$$

donde $k=1,2,...$ and $h=0,1,2,...$ Cada caso es estudiado en (([1], capítulo III, Sección 2.2).

Cuando $\lambda = -k, k = 1,2,3,...$ y $\lambda \neq -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}-1... -\frac{n}{2}-h, ..h = 0,1,2,...$ Esto corresponde al caso cuando la dimensión $n = p+q$ es impar y también cuando la dimensión n es par con la condición adicional $k < \frac{n}{2}$. De (([1],página 255) se tiene

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{\lambda+k}\int_0^\infty u^{\lambda+((p+q)/2)-1} G_0(u)du + \int_0^\infty u^{\lambda+((p+q)/2)-1} G_1(\lambda,u)du \tag{9}$$

donde

$$G_0(u) = \operatorname*{Re\,s}_{\lambda=-k} G(\lambda,u) \tag{10}$$

y $G_1(\lambda,u)$ es regular en $\lambda = -k$.

Por tanto de (([1], página 256), se tiene que la función generalizada (P_+^λ, φ) tiene polos simples en $\lambda = -k$ y valen las siguientes fórmulas:

$$\operatorname*{Re\,s}_{\lambda=-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_1^{(k-1)}(P), \tag{11}$$

$$\delta_1^{(k-1)}(P) = \delta^{(k-1)}(P) \tag{12}$$

y

$$< \delta^{(k-1)}(P), \varphi >= \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^{k-1}\left\{S^{q-2}\,\frac{\Psi(r,s)}{2}\right\}\right]_{s=r} r^{p-1}dr \tag{13}$$

(([1], página 264), página 249), para n impar y también son válidas para n par bajo la condición $k < \frac{n}{2}$.

La integral definida (13) converge si $k < \frac{n}{2}-1$, mientras que si $k \geq \frac{n}{2}-1$, debe entenderse en el sentido de la regularización (([1], página 249 y página 256).

Para el caso cuando el punto singular λ pertenece a ambos conjuntos, de ([1], página 260) se obtiene la siguiente fórmula:

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \frac{1}{\lambda+\frac{n}{2}+h}\int_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\phi_0(u)du + \int_0^\infty u^{\lambda+\frac{n}{2}-1}\phi_1(\lambda,u)du \tag{14}$$

si n es par, donde

$$\phi_0(u) = \operatorname*{Re\,s}_{\lambda=-(\frac{n}{2})-h} G(\lambda,u) \tag{15}$$

y $G(\lambda,u)$ es definida por (4) and $G_1(\lambda,u)$ es una función la cual es regular en $\lambda = -\frac{n}{2}-h, h = 0,1,2,...$

Se sabe de ([1], página 260) que cada una de las integrales de (14) puede tener un polo simple para estos valores de λ. Por tanto (P_+^λ, φ) puede tener un polo de orden dos en $\lambda = -\frac{n}{2}-h, h = 0,1,2,...$

En un entorno de tal punto podemos expandir o desarrollar P_+^λ en serie de de Laurent

$$P_+^\lambda = \frac{C_{-2}^{(h)}}{(\gamma + n/2 + h)^2} + \frac{C_{-1}^{(h)}}{(\gamma + n/2 + h)} + \dots, \tag{16}$$

donde de([1],página261-263), $C_{-2}^{(h)}$ está dada por

$$(C_{-2}^{(h)}, \varphi) = \operatorname*{Res}_{\lambda = -\frac{n}{2} - h} \int_0^\infty u^{\gamma + (n/2) - 1} G_0(u) du$$

$$= \tfrac{1}{h!} G_0^{(h)}(0) \tag{17}$$

$$= \left(\tfrac{(-1)^{(q-1)/2} \pi^{(n/2)-1}}{2^{2h} h! \Gamma((n/2)+h)} L^h \{\delta(x)\}, \varphi \right)$$

para p y q impares, donde L es un operador ultrahiperbólico definido por

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}. \tag{18}$$

EL PRODUCTO MULTIPLICATIVO $P_+^{-l}.\delta^{(k)}(P_+)$

Para este producto vamos analizar cuatro casos:

Caso 1: cuando $\lambda = -k, k = 1, 2, \dots$ y $\lambda = -\frac{n}{2} - h, h = \ 0, 1, 2, .$

Caso 2: cuando $\lambda = -\frac{n}{2} - h, h = \ 0, 1, 2, ..$ y n impar.

Caso 3: cuando $\lambda = -\frac{n}{2} - h, h = \ 0, 1, 2, ..$ p par y q par.

Caso 4: cuando $\lambda = -\frac{n}{2} - h, h = \ 0, 1, 2, .. p$ impar and q impar.

En este artículo se le da un sentido al producto distribucional P_+^{-l} . $\delta^{(k)}$ donde P_+^{-l} significa parte finita de P_+^λ en $\lambda = -l, l = 1, 2, ..$ y $\delta^{(k)}(P_+)$ son las derivadas de orden k de la delta de Dirac definidas por la fórmula (13).

Caso 1: $\lambda = -k, k = 1, 2, \dots$ y $\lambda \neq -\frac{n}{2} - h, h = \ 0, 1, 2, .$

Este caso corresponde a la dimensión $n = p + q$ impar y también si la dimensión n es par pero con la condición adicional $k < \frac{n}{2} - 1.$

En un entorno de tal punto podemos expandir P_+^λ en serie de Laurent

$$P_+^\lambda = \frac{A_{-1}}{\lambda + k} + A_0 + \sum_{\nu \geq 1} A_\nu P_+^{-k} \ln^\nu P_+ \tag{19}$$

donde A_{-1} es el residuo de P_+^λ en $\lambda = -k.$ De (11) y (12), A_{-1} , puede ser escrito en la siguiente forma

$$A_{-1} = \operatorname*{Res}_{\lambda = -k-1} P_+^\lambda = \lim_{\lambda \to -k-1, k = 0, 1, 2, ..} (\lambda + k + 1) P_+^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!} \delta^{(k)}(P_+) \tag{20}$$

si n es impar y $k < \frac{n}{2} - 1$ if n es par.

En(19), A_0 es la parte regular del desarrollo en serie de Laurent de P_+^λ en $\lambda=-k$ definido de la siguiente forma

$$A_0 = \underset{\lambda=-l}{\text{partefinita de}}\, P_+^\lambda = P_+^{-l} = \lim_{\lambda\to-l}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda+l)P_+^\lambda\right] \tag{21}$$

(([1], página 86) donde $l=1,2,..$

$\delta^{(k)}(P_+)$ es definida por (13) y

$$P_+^{-k}\ln^\nu P_+ = P_+^\lambda \ln^\nu P_+\Big|_{\lambda=-k} = \frac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu}P_+^\lambda\Bigg|_{\lambda=-k}. \tag{22}$$

De (20) y (21) se tiene,

$$P_+^{-l}.\delta^{(k)}(P_+) = \frac{k!}{(-1)^k}\lim_{\lambda\to-l}\lim_{\mu\to-k-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}[(\lambda+l)(\mu+k+1)P_+^\lambda.P_+^\mu]. \tag{23}$$

Ahora tomando en cuenta que

$$P_+^\lambda.P_+^\mu = P_+^{\lambda+\mu} \tag{24}$$

para $\lambda,\mu,\lambda+\mu\neq-\frac{n}{2}-h, h=0,1,2,...$ y la propiedad

$$(\lambda+l)(\mu+k+1) = \frac{1}{2}(\lambda+\mu+k+l+1)^2 - \frac{1}{2}(\lambda+l)^2 - \frac{1}{2}(\mu+k+1)^2. \tag{25}$$

De (23), se tiene,

$$P_+^{-l}.\delta^{(k)}(P_+) = \tfrac{k!}{(-1)^k}\lim_{\lambda\to-l}\lim_{\mu\to-k-1}\tfrac{\partial}{\partial\lambda}\Big[\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+k+l+1)^2P_+^{\lambda+\mu}$$

$$-\tfrac{1}{2}(\lambda+l)^2P_+^{\lambda+\mu} - \tfrac{1}{2}(\mu+k+1)^2P_+^{\lambda+\mu}\Big]$$

$$= I_1+I_2+I_3 \tag{26}$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{k!}{(-1)^k}\lim_{\lambda\to-l}\lim_{\mu\to-k-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{1}{2}(\lambda+\mu+k+l+1)^2P_+^{\lambda+\mu}\right] \tag{27}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\frac{k!}{(-1)^k}\lim_{\lambda\to-l}\lim_{\mu\to-k-1}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda+l)^2P_+^{\lambda+\mu}\right] \tag{28}$$

y

$$I_3 = -\frac{1}{2}\frac{k!}{(-1)^k}\lim_{\lambda\to-l}\lim_{\mu\to-k-1}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(\mu+k+1)^2P_+^{\lambda+\mu}\right]. \tag{29}$$

Ahora usando el desarrollo en serie de Laurent de $P_+^{\lambda+\mu}$ en $\lambda+\mu=-s$ para $s=k+l+1$

$$P_+^{\lambda+\mu} = \frac{B_{-1}}{\lambda+\mu+s} + B_0 + \sum_{j\geq1}B_jP_+^{-s}\ln^j P_+ \tag{30}$$

donde

$$B_{-1}=\underset{\lambda+\mu=-s}{\operatorname{Res}} P_+^{\lambda+\mu}=\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\delta^{(s-1)}(P_+) \text{ if } s<n/2 \tag{31}$$

se tiene,

$$I_1=\tfrac{(-1)^k k!}{2}\lim_{\lambda\to -l}\lim_{\mu\to -k-1}\tfrac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda+l+\mu+k+1)^2 P_+^{\lambda+\mu}=$$

$$\tfrac{(-1)^k k!}{2}\lim_{\lambda\to -l}\lim_{\mu\to -k-1}\tfrac{\partial}{\partial\lambda}\Big\{(\lambda+l+\mu+k+1)^2 \tag{32}$$

$$\Big[\tfrac{B_{-1}}{\lambda+\mu+s+1}+B_0+\textstyle\sum_{j\geq 1}B_j P_+^{-s}\ln^j P_+\Big]\Big\}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\tfrac{k!}{(k+l)!}\delta^{(k+l)}(P_+).$$

En forma similar, usando la propiedad

$$\lim_{\lambda\to -l}\lim_{\mu\to -k-1}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{(\lambda+l)^2}{(\lambda+\mu+l+k+1)}\right\}=1 \tag{33}$$

se obtiene

$$I_2=-\frac{(-1)^l(k-1)!}{2(k+l)!}\delta^{(k+l)}(P_+) \tag{34}$$

y con argumentos similares se obtiene que

$$I_3=-\frac{(-1)^l(k-1)!}{2(k+l)!}\delta^{(k+l)}(P_+). \tag{35}$$

De (26) y usando (32), (34) and (35) se obtienen las siguientes fórmulas:

$$P_+^{-l}.\delta^{(k)}(P_+)=a_{l,k}\delta^{(k+l)}(P_+) \tag{36}$$

si n es impar y si $k+l<\frac{n}{2}-1$ para el caso n par. Donde

$$a_{l,k}=-\frac{1}{2}\frac{(-1)^l k!}{(k+l)!} \tag{37}$$

Caso 2: $\lambda=-\frac{n}{2}-h, h=0,1,2,...$ y n impar

En este caso P_+^λ tiene polos simples en $\lambda=-\frac{n}{2}-h, h=0,1,2,...$ para p impar y q par, $p+q=n$ dimensión del espacio ([1] ,página 260) y

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-h,\,h=0,1,2,..}{\operatorname{Res}} P_+^\lambda=\frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2h}h!\Gamma(\frac{n}{2}+h)}L^h\{\delta(x)\} \tag{38}$$

donde

$$L^h = \{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - ... - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\}^h. \tag{39}$$

En un entorno de $\lambda = -\frac{n}{2} - h, h = 0,1,2,...$ podemos desarrollar P_+^λ en serie de Laurent

$$P_+^\lambda = \frac{B_{-1}}{\lambda + \frac{n}{2} + h} + B_0 + \sum_{\nu \geq 1} B_\nu P_+^{-\frac{n}{2}-h} \ln^\nu P_+ \tag{40}$$

donde B_{-1} es el residuo de P_+^λ en $\lambda = -\frac{n}{2} - h$ el cual está dado por la fórmula (38) y B_0 está definido por fórmula (21):

$$\begin{aligned} B_0 &= \underset{\lambda=-\frac{n}{2}-h}{\text{partefinita def}}\ P_+^\lambda = \\ &= P_+^{-\frac{n}{2}-h} = \lim_{\lambda \to -\frac{n}{2}-h} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\left(\lambda + \frac{n}{2} + h\right) P_+^\lambda\right] \end{aligned} \tag{41}$$

Ahora usando las fórmulas (8), (38) y (41), el desarrollo en serie de P_+^λ en $\lambda + \mu = -\frac{n}{2} - s - \frac{n}{2} - h$

$$P_+^{\lambda+\mu} = \frac{C_{-1}^{(\frac{n}{2}+s+h)}}{\lambda + \mu + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + s + h} + C_0 + \sum_{\nu \geq 1} C_j P_+^{-n-s-h} \ln^\nu P_+, \tag{42}$$

donde

$$C_{-1}^{(\frac{n}{2}+s+h)} = \underset{\lambda+\mu=-\frac{n}{2}-h-\frac{n}{2}-s}{\operatorname{Res}} P_+^{\lambda+\mu} = \frac{(-1)^{h+n+s-1}}{(h+n+s-1)!} \delta^{(h+n+s-1)}(P_+) \tag{43}$$

y C_0 es la parte finita de $P_+^{\lambda+\mu}$ en $\lambda + \mu = -\frac{n}{2} - s - \frac{n}{2} - h,$

se obtiene la siguiente fórmula

$$P_+^{-\frac{n}{2}-h}.L^s\delta = -\frac{1}{2}\frac{(-1)^{h+n+s-1}}{(h+n+s-1)!}\delta^{(h+n+s-1)}(P_+) \tag{44}$$

si p is impar y q par (n impar)

Caso 3: $\lambda = -\frac{n}{2} - s, s = 0,1,2...$ p y q ambos pares y n par

.

En este caso P_+^λ tiene polo simple simple en $\lambda = -\frac{n}{2} - s, s = 0,1,2,...$ donde s es un entero no negativo y el residuo está dado por

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-s}{\operatorname{Res}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}\delta_1^{(\frac{n}{2}+s-1)}(P_+) + \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2s}s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}L^s\{\delta(x)\} \tag{45}$$

donde $\delta_1^{(k)}(P_+)$ es la regularización de $\delta^{(k)}(P)$ ([1],página249) y $\delta^{(k)}(P)$ está definida por (13).

Por otra parte, usando la fórmula

$$\delta_1^{(k)}(P)=\delta^{(k)}(P_+)=\frac{(-2)(-1)^k(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!}L^{k-\frac{n}{2}+1}\delta \tag{46}$$

si p y q son pares y $k\geq \frac{n}{2}-1$ ([2], página 26, fórmula 54), la fórmula (45) puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-s,s=0,1,2..}{\operatorname{Re}s} P_+^{\lambda}=\frac{1}{2}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}{(\frac{n}{2}+s-1)!}\delta_1^{(\frac{n}{2}+s-1)}(P_+) \tag{47}$$

si p y q son pares (([3]), página 42) .

Ahora considerando que P_+^{γ} en $\gamma=-\frac{n}{2}-h$ tiene polos simples si p y q son pares y tomando en cuenta las fórmulas (42) y (43), obtenemos la siguiente fórmula

$$\begin{aligned}P_+^{-\frac{n}{2}-h}.\delta^{(\frac{n}{2}+s-1)}(P_+)&=\frac{2(\frac{n}{2}+s-1)!}{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}\{-\tfrac{1}{2}\tfrac{(-1)^{h+n+s-1}}{(h+n+s-1)!}\delta_1^{(h+n+s-1)}(P_+)\}\\&=-\frac{(\frac{n}{2}+s-1)!}{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}\frac{(-1)^{h+n+s-1}}{(h+n+s-1)!}\delta^{(h+n+s-1)}(P_+)\end{aligned} \tag{48}$$

si p y q son pares (n par).

Caso 4: $\lambda=-\frac{n}{2}-h, h=0,1,2...$ p y q impares (n para).

En este caso P_+^{λ} tiene polos de orden dos en $\lambda=-\frac{n}{2}-s, s=0,1,2,..$ y en un entorno de tal punto podemos desarrollar en serie de Laurent P_+^{λ} :

$$P_+^{\lambda}=\frac{e_{-2}^{(s)}}{(\lambda+\frac{n}{2}+s)^2}+\frac{e_{-1}^{(s)}}{(\lambda+\frac{n}{2}+s)}+e_0+\sum_{v\geq 1}e_v P_+^{-\frac{n}{2}-s}\ln P_+ \tag{49}$$

donde

$$e_{-2}^{(s)}=\frac{(-1)^{q+1}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2s}s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}L^s\delta$$

([1], página 264),

$$e_{-1}^{(s)}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}\delta_1^{(\frac{n}{2}+s-1)}(P)+\frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}[\Psi(\frac{p}{2})-\Psi(\frac{n}{2})]}{2^{2s}s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}L^s\delta \tag{50}$$

(([1], página269) y

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \tag{51}$$

Para valores enteros y valores fraccionarios el argumento de $\psi(x)$ es dado por

$$\psi(k)=-\gamma+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k-1}, k=2,3... \tag{52}$$

$$\psi(k+\frac{1}{2})=-\gamma-2\ln 2+2(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2k-1}), k=1,2,.. \tag{53}$$

donde γ es la constante de Euler.

Ahora usando la fórmula

$$\delta_1^{(k)}(P)=\frac{2(-1)^{k-1}(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{k+1-\frac{n}{2}}(k-\frac{n}{2}+1)!}\left[\psi(\frac{p}{2})-\psi(\frac{n}{2})\right]L^{k+1-\frac{n}{2}}\delta \tag{54}$$

para p y q impares y $k+1-\frac{n}{2}\geq 0$,

De $e_{-1}^{(s)}$ se tiene,

$$\underset{\lambda=-\frac{n}{2}-s,\, s=0,1,2..}{\operatorname{Res}}\, P_+^{\lambda}=\frac{1}{2}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}\delta^{(\frac{n}{2}+s-1)}(P_+). \tag{55}$$

De (23), (24), (25) y (26), tomando en cuenta la fórmula (8), se tiene,

$$\begin{aligned}P_+^{-\frac{n}{2}-s}.\delta^{(\frac{n}{2}+h-1)}(P_+)&=\frac{2\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{(\frac{n}{2}+s-1)}}\Big\{\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to-\frac{n}{2}-s}\lim_{\mu\to-\frac{n}{2}-h}\\ &\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda+\mu+\frac{n}{2}+s+\frac{n}{2}+h)^2P_+^{\lambda+\mu}\right]-\\ &-\frac{2\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{(\frac{n}{2}+s-1)}}\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to-\frac{n}{2}-s}\lim_{\mu\to-\frac{n}{2}-h}(\lambda+\frac{n}{2}+s)^2P_+^{\lambda+\mu}\\ &-\frac{2\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{(\frac{n}{2}+s-1)}}\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to-\frac{n}{2}-s}\lim_{\mu\to-\frac{n}{2}-h}(\lambda+\frac{n}{2}+s)^2P_+^{\lambda+\mu}\\ &=J_1+J_2+J_3.\end{aligned} \tag{56}$$

Ahora considerando el desarrollo en serie de Laurent de $P_+^{\lambda+\mu}$ en $\lambda+\mu=-\frac{n}{2}-s-\frac{n}{2}-h$ para p y q impares

$$\begin{aligned}P_+^{\lambda+\mu}&=\frac{f_{-2}^{(\frac{n}{2}+h+s)}}{(\lambda+\mu+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+h+s)^2}+\frac{f_{-1}^{(\frac{n}{2}+h+s)}}{(\lambda+\mu+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+h+s)}+\\ &+f_0+\sum_{\nu\geq1}f_\nu P_+^{-\frac{n}{2}-h-s}\ln P_+,\end{aligned} \tag{57}$$

donde

$$f_{-1}^{(\frac{n}{2}+h+s)}=\underset{\gamma=-\frac{n}{2}-(\frac{n}{2}+s+h)}{\operatorname{Res}}\, P_+^{\gamma}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}+s+h)-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+s+h)}\delta^{(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+s+h-1)}(P) \tag{58}$$

se tiene

$$\begin{aligned}J_1&=\frac{2\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to-\frac{n}{2}-s}\lim_{\mu\to-\frac{n}{2}-h}(\lambda+\mu+\frac{n}{2}+s+\frac{n}{2}+h)^2P_+^{\lambda+\mu}=\\ &=\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}f_{-1}^{(\frac{n}{2}+h+s)}.\end{aligned} \tag{59}$$

De la misma forma para J_2, se obtiene que

$$J_2 = -\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}} f_{-1}^{(\frac{n}{2}+h+s)} \tag{60}$$

debido a la siguiente propiedad

$$\lim_{\lambda \to -\frac{n}{2}-s} \lim_{\mu \to -\frac{n}{2}-h} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\left(\lambda+\frac{n}{2}+s\right)^2}{(\lambda+\mu+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+h+s)}\right]=1. \tag{61}$$

Con argumentos similares podemos demostrar que

$$J_3 = -\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}} f_{-1}^{(\frac{n}{2}+h+s)}. \tag{62}$$

Reemplazando (40), (41) and (43) en la fórmula (56) y usando (58), se obtiene la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} P_+^{-\frac{n}{2}-s}.\delta^{(\frac{n}{2}+h-1)}(P_+) &= J_1+J_2+J_3+J_4 = -\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}\delta^{(\frac{n}{2}+s+h)} \\ &= -\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}\left[\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+s+h-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+s+h)}\delta^{(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+s+h-1)}(P)\right] \\ &= -\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+s+h)}\delta^{(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+s+h-1)}(P) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+s)(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+s+\frac{n}{2}+h)}\delta^{(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+s+h-1)}(P). \end{aligned} \tag{63}$$

si p y q son impares.

REFERENCIAS

[1] Gelfand I.M., and Shilov G.E., Generalized Functions, Vol. I, Academic Press, New York, 1964.

[2] Aguirre M.A., Proportionality of k-th Derivate of Dirac delta in the hyperconeI, Mathematica Balkanica,New Seies Vol.14,2000.

[3] Aguirre M.A. and Mercado L., Nuevas fórmulas acerca del Residuo de la distribución $P_{\pm}^{\gamma}$, Nexo Revista Científica, Vol 20, No. 01, pp. 35-45, 2007.

Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar