Revista Científica

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
www.nexo.uni.edu.ni

Vol. 23, No. 02, pp.62-68/Noviembre 2010

Sobre la inversión de los potenciales de Bessel-Riesz

R. Cerutti

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura
Universidad Nacional del Nordeste. Avda. Libertad 5540
(3400) Corrientes. Argentina
e-mail: rcerutti@exa.unne.edu.ar

(recibido/received: 06-Septiembre-2010; aceptado/accepted: 12-Noviembre-2010)

RESUMEN

En este trabajo se obtiene la inversión de un operador del tipo convolución usando técnicas de integrales hipersingulares. El operador de Bessel-Riesz de una función φ perteneciente a S, el espacio de funciones de prueba de Schwartz, es definido por la convolución con las funciones generalizadas $W_\alpha(P \pm i0, m, n)$ expresables en términos de la función de Bessel de primera especie J_γ $W_\alpha(P \pm i0, m, n)$ es también una combinación lineal infinita del núcleo ultrahiperbólico de Riesz de diferentes ordenes. Este hecho nos permite invertir los potenciales de Bessel-Riesz de un modo análogo a lo hecho en el caso de los potenciales ultrahiperbólicos de Bessel (cf. [01]) y los potenciales causales de Riesz (cf. [2]).

Palabras Claves: Potenciales de Riesz. Integrales Hipersingulares.

ABSTRACT

In this paper the inversion of a convolution type operator is obtained by using hypersingular integral technics. The Bessel-Riesz operator of a function φ belonging to S, the space of test functions of Schwartz, is definied by the convolution with the generalized functions $W_\alpha(P \pm i0, m, n)$ expressible in terms of the Bessel function of first kind J_γ. $W_\alpha(P \pm i0, m, n)$ is also an infinite linear combination of the ultrahyperbolic Riesz kernel of differents orders. This fact allows us to invert the Bessel-Riesz potential in an analogue manner of the ultrahyperbolic Bessel potentials (cf. [01]) and causal Riesz potentials (cf. [2]).

Keywords: Riesz potential, hypersingular integral.

INTRODUCCIÓN

En este artículo tratamos la inversión de ciertos operadores de tipo potencial notados $W^{\alpha}\varphi$ que son convoluciones con una función distribucional perteneciente a una familia de funciones dependientes de un parámetro complejo α, $\{W_{\alpha}(P \pm i0, m, n)\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ y φ una función del espacio S de funciones de Schwartz.

Trione (cf. [3]) introdujo la familia $\{W_{\alpha}(P \pm i0, m, n)\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ mediante la expresión

$$W_{\alpha}(P \pm i0, m, n) = \frac{\left[m^{-1}(P \pm i0)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\alpha-n}{2}}}{(-1)\pi^{\frac{n-2}{2}}2^{\frac{n+\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} J_{\frac{\alpha-n}{2}}\left[m(P \pm i0)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{1}$$

donde m es un numero real no negativo, y J_{γ} es la función de Bessel de primera especie.

Conociendo la transformada de Fourier de la función generalizada $(P \pm i0)^{\lambda}$ (cf. [10]) puede calcularse la transformada de Fourier de $W_{\alpha}(P \pm i0, m, n)$. Trione obtuvo que (cf. [4])

$$\mathfrak{F}[W_{\alpha}(P \pm i0, m, n)] = \sum_{\gamma=0}^{\infty}\binom{-\frac{\alpha}{2}}{\gamma} m^{2\gamma}(Q \mp i0)^{-\frac{\alpha+2\gamma}{2}} \tag{2}$$

Sea φ una función perteneciente a S, el espacio de Schwartz de funciones decrecientes en infinito más rápido que $|x|^{-1}$. El potencial de Bessel-Riesz de orden α esta dado, por definición, por la siguiente convolución

$$W^{\alpha}\varphi = W_{\alpha}(P \pm i0, m, n) * \varphi \tag{3}$$

Usando una expresión equivalente de la función generalizada $(P \pm i0)$ en términos de las funciones generalizadas P_{+} y P_{-} que se definen de la siguiente manera:

$$P_{+}^{\lambda} = \begin{cases} P^{\lambda} & \text{if } P > 0 \\ 0 & \text{if } P < 0 \end{cases}; \quad P_{-}^{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{if } P > 0 \\ |P|^{\lambda} & \text{if } P < 0 \end{cases} \tag{4}$$

De (cf. [4]) resulta que

$$(P \pm i0)^{\lambda} = P_{+}^{\lambda} \pm e^{i\pi\lambda}P_{-}^{\lambda} \tag{5}$$

Teniendo en cuenta esta última expresión y que la función $W_{\alpha}(P \pm i0, m, n)$ puede expresarse como una combinación lineal infinita de las funciones generalizadas $(P \pm i0)$ (cf. [3]), la convolución en (3) tiene la forma

$$W^{\alpha}\varphi = \sum_{\gamma=0}^{\infty}\binom{-\frac{\alpha}{2}}{\gamma} m^{2\gamma}\left[\int_{K_{+}} P^{\frac{\alpha-n+2\gamma}{2}}\varphi(x-t)\,dt + e^{i\pi\frac{(\alpha-n+2\gamma)}{2}}\int_{K_{-}}|P|^{\frac{\alpha-n+2\gamma}{2}}\varphi(x-t)\,dt\right] \tag{6}$$

donde K_{+} y K_{-} denotan los conos: $K_{+} = \{t \in \mathbb{R}^{n} \ : \ P(t) > 0\}$, $K_{-} = \{t \in \mathbb{R}^{n} \ : P(t) < 0\}$.

La integral en (3) converge si $\alpha + 2\gamma > n-2$ y en el caso $\alpha + 2\gamma \leq n-2$ admite una prolongación analítica respecto de α .

Inversion de los potenciales de bessel-riesz

Siguiendo a Rubin (cf. [5]) el problema de la inversión es equivalente en términos de la transformada de Fourier a la división por cierta potencia de la función generalizada $(P \pm i0)$.

Sea α un numero real no negativo, $\alpha < l$; $l > 0$; para cada entero no negativo γ , tal que $\alpha - 2\gamma > 0$, sea $T^{\alpha-2\gamma}_{l,\varepsilon,\gamma} f$ el siguiente operador

$$\left(T^{\alpha-2\gamma}_{l,\varepsilon,\gamma} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(P + i\varepsilon|t|^2\right)^{-\frac{n+\alpha-2\gamma}{2}} \left\{\left(\Delta^l_t f\right)(x)\right\} dt; \tag{7}$$

donde $\left(\Delta^l_t f\right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} (-1)^k f(x-kt)$ es la diferencia de orden l de la función f en el punto x con intervalo t .

El operador $T^{\alpha-2\gamma}_{l,\varepsilon,\gamma} f$ se define como "integral hipersingular en diferencias" y es el análogo causal de la integral definida por Samko (cf. [6]) para el caso elíptico y de la integral definida por Rubin (cf. [7]) para el caso de los potenciales de Bessel y por nosotros (cf. [1]) para el caso de los potenciales causales de Bessel y para los potenciales causales de Riesz (cf. [2], y [8]).

Puede observarse que el operador $T^{\alpha-2\gamma}_{l,\varepsilon,\gamma} f$ depende de la función generalizada $\left(P + i\varepsilon|t|^2\right)$, que es una forma cuadrática con coeficientes complejos cuya parte imaginaria es positiva. Luego, análogamente a lo hecho por Gelfand (cf. [4]) y Trione (cf. [9]) evaluaremos su transformada de Fourier como si él dependiera de $|t|^2$, es decir como si fuera una distribución radial invariante por rotaciones, y finalmente en el resultado haremos la sustitución de $|\xi|^2$ por $\left(Q - i\varepsilon|\xi|^2\right)$.

Sea $\mathfrak{F}\left[T^{\alpha-2\gamma}_{l,\varepsilon,\gamma} f\right](\xi)$ la transformada de Fourier de (7), y sea P una forma cuadrática definida positiva, entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left[T^{\alpha-2\gamma}_{l,\varepsilon,\gamma} f\right](\xi) &= \mathfrak{F}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(P + i\varepsilon|t|^2\right)^{-\frac{n+\alpha-2\gamma}{2}} \left\{\left(\Delta^l_t f\right)(x)\right\} dt\right] = \\ &= \mathfrak{F}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(|t|^2\right)^{-\frac{n+\alpha-2\gamma}{2}} \left\{\left(\Delta^l_t f\right)(x)\right\} dt\right]_{|\xi|^2 \to Q \mp i\varepsilon|\xi|^2} \end{aligned} \tag{8}$$

donde el símbolo que aparece en el segundo miembro es el mismo que aparece en el Teorema debido a Trione (cf. [9]).

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left[T^{\alpha-2\gamma}_{l,\varepsilon,\gamma} f\right](\xi) &= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k \int_{\mathbb{R}^n} |t|^{-(n+\alpha-2\gamma)} dt \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} f(x-kt)\, dx = \\ &= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (-1)^k\, \mathfrak{F}[f](\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\langle t,\xi\rangle} |t|^{-(n+\alpha-2\gamma)} dt \end{aligned} \tag{9}$$

Haciendo el cambio de variables $kt = y$, y aplicando la formula (4) página 263 de [4] se obtiene

$$\mathfrak{F}\left[T_{l,\varepsilon,\gamma}^{\alpha-2\gamma} f\right](\xi) = \mathfrak{F}[f](\xi)\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k k^{\alpha-2\gamma}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha-2\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha-2\gamma}{2}\right)}|\xi|^{\alpha-2\gamma} \tag{10}$$

y realizando la sustitución $|\xi|^2$ by $Q \mp i\varepsilon|\xi|^2$, resulta que

$$\mathfrak{F}\left[T_{l,\varepsilon,\gamma}^{\alpha-2\gamma} f\right](\xi) = \frac{\mathbf{A}_l(\alpha-2\gamma)}{2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{n+\alpha-2\gamma}{2}\right)}e^{i\frac{\pi}{2}q}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(-\frac{\alpha-2\gamma}{2}\right)\mathfrak{F}[f](\xi)\left(Q \mp i\varepsilon|\xi|^2\right)^{\frac{\alpha-2\gamma}{2}} \tag{11}$$

válida para α≠2,4,…, donde

$$\mathbf{A}_l(\alpha-2\gamma) = \sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-1)^k k^{\alpha-2\gamma} \tag{12}$$

Usando las conocidas relaciones $z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$y; $\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi\alpha}{2}}$ la formula puede escribirse, para $\alpha \neq 2,4,\ldots$, como sigue

$$\mathfrak{F}\left[T_{l,\varepsilon,\gamma}^{\alpha-2\gamma} f\right](\xi) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}e^{i\frac{\pi}{2}q}\mathbf{A}_l(\alpha-2\gamma)}{2^{\alpha-2\gamma}\Gamma\left(1+\frac{\alpha-2\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\alpha-2\gamma}{2}\right)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}(\alpha-2\gamma)}\left(Q \mp i\varepsilon|\xi|^2\right)^{\frac{\alpha-2\gamma}{2}}\mathfrak{F}[f](\xi) \tag{13}$$

Cuando $\alpha - 2\gamma = 2,4,\ldots$ se tiene

$$\mathfrak{F}\left[T_{l,\varepsilon,\gamma}^{\alpha-2\gamma} f\right](\xi) = \frac{(-1)^{\alpha-2\gamma}\pi^{\frac{n}{2}}2^{1-(\alpha-2\gamma)}e^{i\frac{\pi}{2}q}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha-2\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\alpha-2\gamma}{2}\right)}\frac{d}{d\alpha}\mathbf{A}_l(\alpha-2\gamma)\left(Q \mp i\varepsilon|\xi|^2\right)^{\frac{\alpha-2\gamma}{2}}\mathfrak{F}[f](\xi) \tag{14}$$

De (13) y (14) se concluye que

$$\mathfrak{F}\left[T_{l,\varepsilon,\gamma}^{\alpha-2\gamma} f\right](\xi) = d_{n,l}(\alpha-2\gamma)\left(Q \mp i\varepsilon|\xi|^2\right)^{\frac{\alpha-2\gamma}{2}}\mathfrak{F}[f](\xi) \tag{15}$$

donde $d_{n,l}(\alpha-2\gamma)$ es análoga a las constantes que aparecen en el caso de los potenciales de Riesz elípticos y de los potenciales de Bessel y causales de Bessel (cf. [7], [6], [1], [8]).
De las anteriores consideraciones resulta valido el siguiente

Teorema 1: *Sea* α *un numero real,* $\alpha \neq -\frac{n}{2} - k$ *,* $k = 0,1,2,\ldots$*,* $\alpha < l$ *;* l *un entero no negativo. Sea* f *una función perteneciente a* S*, y sea* γ *un entero no negativo fijo tal que* $\alpha - 2\gamma > 0$ *.*
Entonces la integral hipersingular de orden $\alpha - 2\gamma$ *;* $T_{l,\varepsilon,\gamma}^{\alpha-2\gamma} f$ *existe y su transformada de Fourier es*

$$\mathfrak{F}\left[T_{l,\varepsilon,\gamma}^{\alpha-2\gamma} f\right](\xi) = d_{n,l}(\alpha-2\gamma)\left(Q \mp i\varepsilon|\xi|^2\right)^{\frac{\alpha-2\gamma}{2}}\mathfrak{F}[f](\xi) \tag{16}$$

donde la constante $d_{n,l}(\alpha-2\gamma)$ *está dada por*

$$d_{n,l}(\alpha-2\gamma)=\begin{cases}\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}+1}e^{i\frac{\pi}{2}q}\mathbf{A}_l(\alpha-2\gamma)}{2^{\alpha-2\gamma}\Gamma\left(1+\frac{\alpha-2\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\alpha-2\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(\alpha-2\gamma)} & \text{If } \alpha\neq 2,4,6\ldots\\[2ex] \dfrac{(-1)^{\alpha-2\gamma}\pi^{\frac{n}{2}}2^{1-(\alpha-2\gamma)}e^{i\frac{\pi}{2}q}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha-2\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+\alpha-2\gamma}{2}\right)}\dfrac{d}{d\alpha}\mathbf{A}_l(\alpha-2\gamma) & \text{If } \alpha= 2,4,6\ldots\end{cases} \tag{17}$$

La derivada generalizada de bessel-riesz

El propósito en esta sección es obtener un operador inverso de W^{α}, que será indicado por $\left(W^{\alpha}\right)^{-1}$, tal que si $f=W^{\alpha}\varphi$ resulte que $\varphi=\left(W^{\alpha}\right)^{-1}f$. Para hacer eso se introduce el siguiente operador que notaremos $(W^{\alpha})^{-1}$ definiéndolo del siguiente modo

$$\left(W^{\alpha}\right)^{-1}=\sum_{\gamma=0}^{[\frac{\alpha}{2}]}\binom{\frac{\alpha}{2}}{\gamma}\frac{m^{2\gamma}T_l^{\alpha-2\gamma}f}{d_{n,l}(\alpha-2\gamma)}+\sum_{\gamma\geq[\frac{\alpha}{2}]+1}^{\infty}\binom{\frac{\alpha}{2}}{\gamma}m^{2\gamma}\frac{R_{-\alpha+2\gamma}}{H(-\alpha-2\gamma)}*f \tag{18}$$

Donde

$$T_l^{\alpha-2\gamma}f=\lim_{\varepsilon\to 0}T_{l,\varepsilon}^{\alpha-2\gamma}f. \tag{19}$$

$\left(W^{\alpha}\right)^{-1}$ es un operador que es combinación lineal de derivadas causales de Riesz de orden $\alpha-2\gamma$, $\gamma=0,1,\cdots,\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ más un operador integral, cuya transformada de Fourier esta dada por

$$\mathfrak{F}\left[\left(W^{\alpha}\right)^{-1}(f)\right](\xi)=\sum_{\gamma=0}^{[\frac{\alpha}{2}]}\binom{\frac{\alpha}{2}}{\gamma}m^{2\gamma}(Q-i0)^{\frac{\alpha-2\gamma}{2}}\mathfrak{F}[f]+\sum_{\gamma\geq[\frac{\alpha}{2}]+1}^{\infty}\binom{\frac{\alpha}{2}}{\gamma}m^{2\gamma}(Q-i0)^{\frac{\alpha}{2}-\gamma}\mathfrak{F}[f] \tag{20}$$

Observando que cada término del segundo miembro en tiene la misma forma, puede escribirse

$$\mathfrak{F}\left[\left(W^{\alpha}\right)^{-1}(f)\right](\xi)=\sum_{\gamma\geq 0}\binom{\frac{\alpha}{2}}{\gamma}m^{2\gamma}(Q-i0)^{\frac{\alpha-2\gamma}{2}}\mathfrak{F}[f](\xi) \tag{21}$$

y teniendo en cuenta que

$$\mathfrak{F}\left[W_{\alpha}\left(P\pm i0,m,n\right)\right]=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\binom{-\frac{\alpha}{2}}{\gamma}m^{2\gamma}\left(Q\mp i0\right)^{-\frac{\alpha+2\gamma}{2}} \tag{22}$$

resulta

$$\mathfrak{F}\left[W_{-\alpha}*f\right]=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\binom{\frac{\alpha}{2}}{\gamma}m^{2\gamma}(Q-i0)^{\frac{\alpha}{2}-\gamma}=\mathfrak{F}\left[\left(W^{\alpha}\right)^{-1}(f)\right] \tag{23}$$

De modo análogo a lo hecho para definir la derivada de Riesz (cf. [6]), la derivada causal de Riesz (cf. [8]) y la derivada causal de Bessel (cf. [1]) definimos la *derivada generalizada de Bessel-Riesz de orden* α *de una función* f perteneciente a S para $\alpha \neq 1,3,5,\ldots$ D^{α} como el operador, que expresado mediante su transformada de Fourier, esta dado por la siguiente expresión:

$$\mathfrak{F}\left[\mathsf{D}^{\alpha} f\right](\xi)=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\binom{\frac{\alpha}{2}}{\gamma} m^{2\gamma}(Q \mp i0)^{\frac{\alpha-2\gamma}{2}} \mathfrak{F}[f](\xi) \tag{24}$$

En lo que sigue probaremos que D^{α} es un operador inverso a izquierda del operador W^{α}.

Teorema 2 *Sea* φ *una función de* S, α *un número real positivo,* $\alpha \neq 1,3,5,\ldots$ $\frac{n+\alpha}{2} \neq -\frac{n}{2}-k$ *;* $k=0,1,2,\ldots$ *y* $\mathsf{D}^{\alpha}\varphi = f$ *, para* $f \in S$ *. Entonces* $\varphi = W^{\alpha} f$ *.*

Demostración: Como por hipotesis $\mathsf{D}^{\alpha}\varphi = f$ aplicando transformada de Fourier a ambos miembros se tiene que $\mathfrak{F}\left[\mathsf{D}^{\alpha}\varphi\right] = \mathfrak{F}[f]$.

Considerando (24), puede escribirse

$$\mathfrak{F}[f]=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\binom{\frac{\alpha}{2}}{\gamma} m^{2\gamma}(Q \mp i0)^{\frac{\alpha+2\gamma}{2}} \mathfrak{F}[\varphi](\xi) \tag{25}$$

y teniendo en cuenta (23), puede escribirse

$$\mathfrak{F}[f]=\mathfrak{F}\left[W_{-\alpha}(P \pm i0, m, n) * \varphi\right]. \tag{26}$$

De las propiedades del núcleo $W_{\alpha}(P \pm i0, m, n)$ y por la unicidad de la transformada de Fourier resulta $W_{\alpha}(P \pm i0, m, n) * f = \varphi,$ o equivalentemente

$$W^{\alpha} f = \varphi \tag{27}$$

que es la tesis del Teorema 2.

REFERENCIAS

[1] Cerutti, R.A. *The ultrahyperbolic Bessel operator: an inversion theorem.* Mathematical and Computer Modelling. Vol. 22, Nº2. 1995

[2] Cerutti, R.A. *On the inversion of causal Riesz potentials.* Trabajos de Matemática Nº248, Instituto Argentino de Matemática, CONICET - UBA. 1995

[3] Trione, S.E. *On elementary* $(P \pm i0)^{\lambda}$ *ultrahyperbolic solution of the Klein-Gordon operator iterated* k *-times.* Integral Transforms and Special Functions. Vol. 9. Nº 2; pp. 149-162. 2000.

[4] Gelfand,I.M. and Shilov, G.E., *Generalized Functions*, Vol I, Academic Press, New York, 1964.

[5] Rubin, B. *Fractional integral and potentials*. Pitman Monograhs 82. Longman. 1996.

[6] Samko, S.G. *On spaces of Riesz potentials*. Math. USSR, Izvestiya, Vol. 10, Nº 5, pp. 1089-1117. 1976.

[7] Rubin, B. *Description and inversion of Bessel potentials by using hypersingular integrals with weighted differences.* Differential Equations, 22. Nº 10, pp. 1246-1256. 1987.

[8] Cerutti, R.A. and Trione, S.E. *Some properties of the generalized causal and anticausal Riesz potentials.* Applied Math Letters, 13 2000, 129-136.

[9] Trione, S.E., *Distributional products*, Cursos de Matemática, Nº 3, Instituto Argentino de Matemática, IAM-CONICET, Buenos Aires, Argentina, 1980.

[10] Riesz, M. *L'integral de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Mathematica, 81, pp. 1-223.1949.

[11] Trione, S.E., *Sobre núcleos ultrahiperbólicos de Marcel Riesz y sus propiedades.* Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires. 1997.

Ruben Alejandro Cerutti: Doctor en Matematica por la Universidad Nacional del Nordeste, UNNE, Argentina y diplomado en Historia de las Ciencias por la Universidad de Zaragoza, España.
Profesor Titular de Analisis de variable compleja en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNNE y de Analisis Matematico del Profesorado en Matematica de la Universidad Nacional de Formosa,Argentina.