Nexo Revista Científica

Vol. 22, No. 02, pp.66-71/Diciembre 2009

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
www.uni.edu.ni/Nexo

El producto de convolución de la derivada de la delta de Dirac en *1-x*^{2}*

M. García y M. Aguirre†

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro, Pinto 399,
7000 Tandil, Argentina.
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 10-Marzo-2009; aceptado/accepted: 20-Noviembre-2009)

RESUMEN

En este artículo se le dio un sentido al producto de convolución de $\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right) * \delta^{(\ell-1)}\left(1-x^2\right)$.
Como caso particular se obtuvo una fórmula del producto de convolución de $\delta\left(1-x^2\right) * \delta\left(1-x^2\right)$ (C.f. fórmula (38)).

Palabras Claves: Convolución; Producto

ABSTRACT

In this paper we give a sense to distribution convolution product of $\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right) * \delta^{(\ell-1)}\left(1-x^2\right)$.
As a particular case we obtain a formula to convolution product of $\delta\left(1-x^2\right) * \delta\left(1-x^2\right)$ (C.f. formula (38)).

Keywords: Convolution; Product.

---

* Este trabajo fue parcialmente soportado por la Comisión de Investigación Científica de la Provincia de Buenos Aires (C.I.C.), Argentina.

† Autor para la correspondencia

INTRODUCCIÓN

Sea x un punto en R y λ un complejo en C, donde con R se designa a los números reales y con C a los números complejos.

Consideremos la función $\left(1-x^2\right)_+^\lambda$ igual $\left(1-x^2\right)_+^\lambda$ para $1-x^2>0$, y cero para $1-x^2\leq 0$. La función generalizada correspondiente es definida de la siguiente forma,

$$\left\langle \left(1-x^2\right)_+^\lambda, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-x^2\right)_+^\lambda \varphi(x)dx = \int_{-1}^{+1} \left(1-x^2\right)^\lambda \varphi(x)dx \tag{1}$$

Para toda φ en K, donde K es el conjunto de funciones con derivadas continuas de todos los órdenes y con soporte acotado ([1], página 195).

La integral (1) converge para $\operatorname{Re}\lambda > 1$, y para otros valores de λ puede ser regularizada (analíticamente prolongada) de acuerdo con la expresión dada en ([2], capítulo I, sección 3).

De (([2]), página 183), $\left(1-x^2\right)_+^\lambda$ es una función generalizada la cual es analítica en todo punto excepto en los puntos $\lambda=-k,$ donde k es cualquier entero positivo en cuyos puntos tiene polos simples con residuo

$$\underset{\lambda=-k,\ k=1,2,\ldots}{\operatorname{Re}s}\left(1-x^2\right)_+^\lambda = \lim_{\lambda\to -k} (\lambda+k)\left(1-x^2\right)_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right). \tag{2}$$

Se calculará la transformada de Fourier de $\left(1-x^2\right)_+^\lambda$. Primeramente se restringen las consideraciones a valores de λ tales que $-1<\operatorname{Re}\lambda<0$.

Se considera la expresión:

$$\begin{aligned} F\left\{e^{-x\tau}\left(1-x^2\right)_+^\lambda\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\tau} e^{\sigma x i}\left(1-x^2\right)_+^\lambda dx = \\ &= \int_{-1}^{+1}\left(1-x^2\right)^\lambda e^{ixs}dx \end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$s=\sigma+i\tau \tag{4}$$

Ahora usando la fórmula ([2], fórmula 2, página 185),

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\upsilon-1}e^{i\mu x}dx = \sqrt{\pi}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{\upsilon-1/2}\Gamma(\upsilon)\ J_{\upsilon-1/2}(\mu), \qquad \operatorname{Re}(\upsilon)>0, \tag{5}$$

se tiene

$$F\left\{e^{-x\tau}\left(1-x^2\right)_+^\lambda\right\} = \sqrt{\pi}\ 2^{\lambda+1/2}\ s^{-\lambda-1/2}\ \Gamma(\lambda+1)\ J_{\lambda+1/2}(s) \tag{6}$$

donde

$$J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j (z/2)^{2j}}{j!\,\Gamma(\alpha+j+1)} \tag{7}$$

y s es definida por (4).

La fórmula (6), usando (7) puede ser escrita en la siguiente forma

$$F\left\{e^{-x\tau}\left(1-x^2\right)_+^\lambda\right\}=\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j(s/2)^{2j}}{j\,!\,\Gamma(\lambda+j+3/2)} \tag{8}$$

Como $\tau\to 0^+$ se concluye que $e^{-x\tau}\left(1-x^2\right)_+^\lambda$ converge a $\left(1-x^2\right)_+^\lambda$ en el sentido de las funciones generalizadas, luego su transformada de Fourier converge a la transformada de Fourier de $\left(1-x^2\right)_+^\lambda$.

De (8) y tomando límite cuando $\tau\to 0^+$, se llega a la siguiente fórmula

$$F\left\{\left(1-x^2\right)_+^\lambda\right\}=\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1)\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j}{2^{2j}\;j\,!\,\Gamma(\lambda+j+3/2)}(\sigma+i0)^{2j} \tag{9}$$

donde

$$(\sigma+i0)^\lambda=\lim_{\tau\to 0^+}(\sigma+i\tau)^\lambda \qquad ([2], \text{página } 59) \tag{10}$$

Ahora por prolongación analítica ([2], página 171) esta fórmula se extendería para todos los valores de λ tales que $\lambda\neq -1,\,-2,\,-3,\,..$

Dividiendo ambos términos de la ecuación por $\Gamma(\lambda+1)$, se obtiene una función entera de λ en ambos lados de la ecuación, así que para todo l λ se puede escribir

$$F\left\{\frac{\left(1-x^2\right)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right\}=\sqrt{\pi}\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j}{2^{2j}\;j\,!\,\Gamma(\lambda+j+3/2)}(\sigma+i0)^{2j} \tag{11}$$

donde

$$F\{f(x)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i\sigma x}dx \tag{12}$$

y

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F\{f(x)\}(y)\;e^{-i\sigma y}\;dy. \tag{13}$$

Por otra parte, de (11) usando (2) y considerando las fórmulas

$$(\sigma+i0)^\lambda=\sigma^\lambda \tag{14}$$

si λ es un entero no negativo ([2], página 60) y

$$\operatorname*{Res}_{z=-\ell,\;\ell=0,\,1,\,2,\,...}\Gamma(z)=\frac{(-1)^\ell}{\ell\,!} \tag{15}$$

donde $\Gamma(z)$ es la función gamma definida por:

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\;x^{z-1}\;dx. \tag{16}$$

Se obtiene la transformada de Fourier de $\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)$,

$$F\left\{\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)\right\}=\sqrt{\pi}\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j}{2^{2j}\ j\,!\,\Gamma\left(j+3/2-k\right)}(\sigma)^{2j} \tag{17}$$

para $k=1,2,3,...$

De (17) y usando la fórmula

$$F\left\{\delta^{(2m)}(x)\right\}=(-1)^m\sigma^{2m} \quad \text{([2], página 60)} \tag{18}$$

se tiene

$$F\left\{\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)\right\}=\sqrt{2\pi}\sum_{j\geq 0}\frac{1}{2^{2j}\ j\,!\,\Gamma\left(j+3/2-k\right)}F\left\{\delta^{(2j)}(x)\right\}. \tag{19}$$

De (19) se obtiene un desarrollo tipo Taylor de $\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)$,

$$\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{j\geq 0}\frac{1}{2^{2j}\ j\,!\,\Gamma\left(j+3/2-k\right)}\delta^{(2j)}(x) \tag{20}$$

EL PRODUCTO DE CONVOLUCIÓN DE $\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)*\delta^{(\ell-1)}\left(1-x^2\right)$

La distribución $\delta^{(2m)}(x)$ es de clase $O_C^{'}$, donde $O_C^{'}$ es el dual del espacio O_C, y O_C son funciones que decrecen rápidamente, por tanto $\delta^{(2m)}(x)\in S'$. Considerando el teorema clásico de Laurent Schwartz ([S], página 268, fórmula (VII, 8,5))

$$\mathbf{F}\left\{\delta^{(2m)}(x)*\delta^{(2\ell)}(x)\right\}=(2\pi)\mathbf{F}\left\{\delta^{(2m)}(x)\right\}.\mathbf{F}\left\{\delta^{(2\ell)}(x)\right\} \tag{21}$$

y la fórmula (18) se tiene,

$$\mathbf{F}\left\{\delta^{(2m)}(x)*\delta^{(2\ell)}(x)\right\}=2\pi(-1)^{m+\ell}\sigma^{2(m+\ell)} \tag{22}$$

$$=2\pi\mathbf{F}\left\{\delta^{(2(m+\ell))}(x)\right\}. \tag{23}$$

De la fórmula (22), se obtiene la fórmula

$$\delta^{(2m)}(x)*\delta^{(2\ell)}(x)=\delta^{(2(m+\ell))}(x). \tag{24}$$

Ahora de (20) y considerando que $\delta^{(2m)}(x)$ está en $O_C^{'}$ entonces $\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)$ es de clase $O_C^{'}$, y el producto de convolución $\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)*\delta^{(\ell-1)}\left(1-x^2\right)$ existe.
Por tanto, de (20) y considerando (24) se tiene

$$\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)*\delta^{(\ell-1)}\left(1-x^2\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j}{j!2^{2j}\Gamma\left(j+\frac{3}{2}-k\right)}\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\sum_{r\geq 0}\frac{(-1)^r}{r!2^{2r}\Gamma\left(r+\frac{3}{2}-\ell\right)}\left[\delta^{(2j+2r)}(x)\right] \tag{25}$$

ahora, tomando en cuenta la fórmula

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\,\Gamma(\alpha-k+1)} \tag{26}$$

y la propiedad

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n-\ell+\frac{1}{2}}{j}\binom{n-k+\frac{1}{2}}{n-j}=\binom{2n-\ell-k+1}{n} \tag{27}$$

se tiene,

$$\begin{aligned}&\sum_{j\geq 0}\sum_{r\geq 0}\frac{1}{2^{2(j+r)}\,j!\,r!\,\Gamma\left(j+\frac{3}{2}-k\right)\Gamma\left(r+\frac{3}{2}-\ell\right)}=\\ &\sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^{2(j+r)}\,j!(n-j)!}\frac{1}{\Gamma\left(j+\frac{3}{2}-k\right)\Gamma\left(n-j+\frac{3}{2}-\ell\right)}\end{aligned} \tag{28}$$

donde $j+r=n$, por tanto,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma\left(j+\frac{3}{2}-k\right)\Gamma\left(n-j+\frac{3}{2}-\ell\right)}=\\ &=\sum_{n\geq 0}\left\{\sum_{j=0}^{n}\binom{n-\ell+\frac{1}{2}}{j}\frac{1}{\Gamma\left(n-\ell+\frac{3}{2}\right)}\binom{n-k+\frac{1}{2}}{n-j}\frac{1}{\Gamma\left(n-k+\frac{3}{2}\right)}\right\}=\\ &=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\Gamma\left(n-\ell+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-k+\frac{3}{2}\right)}\binom{2n-k-\ell+1}{n}.\end{aligned} \tag{29}$$

entonces,

$$\begin{aligned}&\sum_{j\geq 0}\sum_{r\geq 0}\frac{1}{2^{2(j+r)}\,j!\,r!\,\Gamma\left(j+\frac{3}{2}-k\right)\Gamma\left(r+\frac{3}{2}-\ell\right)}=\\ &\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{2n}\,n!\,\Gamma\left(n-\ell+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-k+\frac{3}{2}\right)}\frac{\Gamma(2n-k-\ell+2)}{\Gamma(n-k-\ell+2)}.\end{aligned} \tag{30}$$

De (25) y usando (30) se obtiene

$$\begin{aligned}&\delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right)*\delta^{(\ell-1)}\left(1-x^2\right)=\\ &=\frac{1}{4\pi}\sum_{n\geq 0}A_{n,k,\ell}\,\delta^{(2n)}(x)\end{aligned} \tag{31}$$

donde,

$$A_{n,k,\ell}=\frac{\Gamma(2n-k-\ell+2)}{2^{2n}\,n!\,\Gamma\left(n-\ell+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-k+\frac{3}{2}\right)\Gamma(n-k-\ell+2)}. \tag{32}$$

En particular, haciendo $k=\ell=1$ en (31), (32) y usando la fórmula de duplicación de Legendre

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

se tiene

$$\delta(1-x^2) * \delta(1-x^2) = \tfrac{1}{4\pi} \sum_{n\geq 0} A_{n,1,1} \delta^{(2n)}(x)$$

$$= \tfrac{1}{4\pi} \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n} n! \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma(n)} \delta^{(2n)}(x) \tag{33}$$

$$= \frac{1}{4\pi(\sqrt{\pi})} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \delta^{(2n)}(x).$$

Por otra parte, considerando la función definida por:

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)_+^{\lambda} = \begin{cases} \left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\lambda} & si \quad 1-\frac{x^2}{4} > 0 \\ 0 & si \quad 1-\frac{x^2}{4} \leq 0 \end{cases} \tag{34}$$

y considerando las fórmulas (3), (6), (7), (8), (11), (17), (18) y (20) se obtiene la siguiente fórmula,

$$\delta^{(k-1)}\left(1-\frac{x^2}{4}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2\pi} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j! \Gamma\left(j+\frac{3}{2}-k\right)} \delta^{(2j)}(x). \tag{35}$$

De (33) y (35) se obtiene la siguiente fórmula,

$$\delta\left(1-x^2\right) * \delta\left(1-x^2\right) =$$

$$= \tfrac{1}{4\pi\sqrt{\pi}} \sum_{n\geq 0} \tfrac{\delta^{(2n)}(x)}{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \tag{36}$$

$$= \tfrac{1}{4\pi} \delta\left(1-\tfrac{x^2}{4}\right).$$

De (36) se concluye que

$$\delta\left(1-x^2\right) * \delta\left(1-x^2\right) = \frac{1}{4\pi} \delta\left(1-\frac{x^2}{4}\right) \tag{37}$$

o equivalentemente

$$\delta\left(1-x^2\right) * \delta\left(1-x^2\right) = \frac{1}{4\pi} \delta\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right). \tag{38}$$

REFERENCIAS

[1] Zemanian, A. H. 1965. *Distribution theory and Transform Analysis.* Mc Graw Hill Book Company. New York.

[2] Gel'fand and Shilov. 1964. *Generalized Functions*- Vol. I-Academic Press, New York

[3] Schwartz Laurent. 1973. *Theorie des Distributions.*Hermann, París.

Manuel A. Aguirre, es Profesor y Decano de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar