Nexo Revista Científica

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
www.uni.edu.ni/Nexo

Vol. 22, No. 02, pp.72-79/Diciembre 2009

Fórmulas de recurrencia entre Pm y la derivada k-esima de la delta de Dirac soportada en P*

M. Aguirre.

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro, Pinto 399,
7000 Tandil, Argentina.
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 08-Agosto-2009; aceptado/accepted: 05-Diciembre-2009)

RESUMEN

En este artículo se le dio un sentido a la fórmula de recurrencia $P^m.\delta^{(k)}(P) - Cm,k\delta^{(k-m)}(P) = 0$ si $k \geq m$ (ver fórmula 15) considerando la condición $gradP \neq 0$, donde la constante Cm,k fue definida por la fórmula 16. En el segundo parágrafo se le dio un sentido a la misma fórmula pero para un caso especial: $P = P(x) = P(x_1,...x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ...x_p^2 - x_{p+1}^2 - ...x_{p+q}^2$.

La fórmula que se obtuvo es una generalización de fórmulas que aparecen en el libro de Gelfand and Shilov formula (c.f. ([1]), página 233) y es considerada por ejemplo por Bollini, Giambiagi and Tiomno para la teoría de regularización analítica en las ecuaciones clásicas de Yang-Mills y sus aplicaciones para el potencial singular (c.f. [4]).

Palabras Claves: Recurrencia; potencia singular

ABSTRACT

In this paper we gave a sense to recurrence formula $P^m.\delta^{(k)}(P) - Cm,k\delta^{(k-m)}(P) = 0$ if $k \geq m$ (see formula 15) considering the condition $gradP \neq 0$, where the constant Cm,k was defined by formula 16. In the second paragraph we gave a sense to the same formua for the special case $P = P(x) = P(x_1,...x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ...x_p^2 - x_{p+1}^2 - ...x_{p+q}^2$..

Our formula is a generalization of the Gelfand and Shilov formula (c.f. ([1]), page 233) and is considered for example, by Bollini, Giambiagi and Tiomno for their theory of analytic regularization in classical Yang-Mills equations and its applications for the singular potentials (c.f. [4]).

Keywords: Recurrence; singular potentials

*Este trabajo es parcialmente soportado por la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (C.I.C.), Argentina

INTRODUCCIÓN

De

$$P(x_1,...x_n)=0. \tag{1}$$

La forma w es definida por

$$dP.w=dv \tag{2}$$

donde,

$$dv=dx_1...dx_n \tag{3}$$

y P es una función infinitamente diferenciable tal que gradiente de $P = gradP=(\frac{\partial P}{\partial x_1},\frac{\partial P}{\partial x_2},...\frac{\partial P}{\partial x_n})$ no se anule en S (lo cual significa que no tiene puntos singulares).

De ([1], página 220, fórmula 2), se tiene

$$w=(-1)^{j-1}D\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}du_1...du_{j-1}du_{j+1}...du_n \tag{4}$$

donde $D\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}$ es el Jacobiano de la transformación de x_i a u_i para $i=1,2,...n,$ cual es positivo.

Si en el entorno de un punto dado $\frac{\partial P}{\partial x_j}\neq 0,$ y seleccionamos las coordenadas de u_i de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
u_1 &= x_1\\
u_2 &= x_2\\
&.\\
&.\\
&.\\
u_j &= P(x_1,...x_n)\\
u_{j+1} &= x_{j+1}\\
&.\\
&.\\
&.\\
u_n &= x_n
\end{aligned} \tag{5}$$

entonces

$$D\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}=\frac{1}{\frac{\partial P}{\partial x_j}} \tag{6}$$

con

$$\frac{\partial P}{\partial x_j}>0 \tag{7}$$

y la forma w definida por (4) se transforma en,

$$w=\frac{(-1)^{j-1}dx_1...dx_{j-1}dx_{j+1}...dx_n}{\frac{\partial P}{\partial x_j}}. \tag{8}$$

Por otra parte, de ([1], página 228), se tiene

$$w_k(\varphi)=\frac{\partial^k}{\partial u_1^k}\left\{\varphi_1 D\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}\right\}du_2...du_n \tag{9}$$

donde

$$\varphi_1(u_1,...u_n)=\varphi(x_1,...x_n) \tag{10}$$

y

$$w_o(\varphi)=\varphi.w. \tag{11}$$

Considerando (9) en ([1], página 230) $\delta^{(k)}(P)$ es definida por

$$\left\langle \delta^{(k)}(P),\varphi \right\rangle = (-1)^k \int_{P=0} w_k(\varphi). \tag{12}$$

También de ([1], página 221, fórmula 8), se tiene

$$\left\langle \delta^{(k)}(P),\varphi \right\rangle = (-1)^k \int_{P=0} \psi_{u_1}^{(k)}(o,u_2,...u_n)du_2...du_n \tag{13}$$

donde

$$\psi_{u_1}(u_1,u_2,...u_n)=\varphi_1(u_1,...u_n)D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \tag{14}$$

y $D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ es el Jacobiano de la transformación de x_i a u_i.

En este artículo se le da un sentido a la fórmula de recurrencia $P^m.\delta^{(k)}(P)-Cm,k\delta^{(k-m)}(P)=0$ si $k\geq m$ (ver 15) considerando la condición $gradP\neq 0,$ donde la constante Cm,k es definida por (16). En el segundo parágrafo se le da un sentido a la misma fórmula pero para un caso especial: $P=P(x)=P(x_1,...x_n)=x_1^2+x_2^2+...x_p^2-x_{p+1}^2-...x_{p+q}^2$.

La fórmula que se obtiene es una generalización de fórmulas que aparecen en el libro de Gelfand and Shilov formula (c.f. ([1]), página 233) y es considerada por ejemplo por Bollini, Giambiagi and Tiomno para la teoría de regularización analítica en las ecuaciones clásicas de Yang-Mills y sus aplicaciones para el potencial singular (c.f. [4]).

EL PRODUCTO DE $P^m.\delta^{(k)}(P)$

En este parágrafo, se le da un sentido al producto distribucional $P^m.\delta^{(k)}(P)$ donde P es una función infinitamente diferenciable tal que gradiente de $P = gradP\neq 0$ en S donde S es una hipersuperficie dada por $P(x_1,...x_n)=0,$ m es un número entero no-negativo y $\delta^{(k)}(P)$ es la derivada de orden k de la delta de Dirac soportada en P definida por (12).

Teorema 1 Sea $P(x_1,...x_n)$ cualquier función suficientemente suave tal que en $P(x_1,...x_n)=0,$ $gradP(x_1,\ldots x_n)\neq 0$ (lo cual significa que no hay puntos singulares en $P(x_1,...x_n)=0$), entonces se tiene la siguiente fórmulas:

$$P^m.\delta^{(k)}(P)=\begin{cases} C_{m,k}\delta^{(k-m)}(P) & if\ k\geq m \\ \quad y & \\ 0 & if\ k<m \end{cases} \tag{15}$$

donde

$$C_{m,k}=\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} m!(-1)^m, \tag{16}$$

m y k son enteros no-negativos, $\delta^{(k)}(P)$ es definida por (12) y $\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}=\frac{k!}{m!(k-m)!}$.

Demostración. De ([2], página 117) se tiene la siguiente definición:

$$\left\langle \alpha.T,\varphi \right\rangle = \left\langle T,\alpha.\varphi \right\rangle \tag{17}$$

donde $\varphi \in D, \alpha(x) \in E$ ([2], página 88) y $T \in D^{`}$ (espacio de distribuciones ([2], página 71)).

De (17) y considerando (9) y (12) se tiene,

$$\left\langle P^m .\delta^{(k)}(P), \varphi \right\rangle = \left\langle \delta^{(k)}(P), P^m .\varphi \right\rangle = (-1)^k \int_{P=0} w_k(P^m .\varphi) \tag{18}$$

donde

$$w_k(P^m \varphi) = \left[\frac{\partial^k}{\partial u_1^k} \left\{ u_1^m \varphi_1 D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right\} \right]_{u_1=0} du_2 ... du_n . \tag{19}$$

De (19) y considerando la validez de la fórmula de Leibniz para la derivación de un producto se tiene:

Para cada entero positivo k,

$$w_k(P^m \varphi) = \left[\sum_{\nu=o}^{k} \begin{pmatrix} k \\ \nu \end{pmatrix} \tfrac{\partial^k}{\partial u_1^k} (u_1^m) \tfrac{\partial^{k-\nu}}{\partial u_1^{k-\nu}} \left(\varphi_1 D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right) \right]_{u_1=0} du_2 ... du_n =$$

$$== \begin{cases} 0 & if \ k < m \\ and & \\ \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} m! \left[\tfrac{\partial^{k-m}}{\partial u_1^{k-m}} \left(\varphi_1 D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right) \right]_{u_1=0} du_2 ... du_n & if \ k \geq m. \end{cases} \tag{20}$$

De (18) y considerando (9), (12) y (20) se tiene

$$P^m .\delta^{(k)}(P) = 0 \text{ si } k < m \tag{21}$$

y

$$\left\langle P^m .\delta^{(k)}(P), \varphi \right\rangle = (-1)^k \int_{P=0} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} m! \left[\tfrac{\partial^{k-m}}{\partial u_1^{k-m}} \left(\varphi_1 D\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right) \right]_{u_1=0} du_2 ... du_n =$$

$$= (-1)^k \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} m! (-1)^{k-m} \left\langle \delta^{(k-m)}(P), \varphi \right\rangle \text{ si } k \geq m \tag{22}$$

De (21) y (22) se obtiene la siguiente fórmula

$$P^m .\delta^{(k)}(P) = \begin{cases} \tfrac{(-1)^m k!}{(k-m)!} \delta^{(k)}(P) & if \ k \geq m \\ and & \\ 0 & if \ k < m. \end{cases} \tag{23}$$

la cual coincide con (15). El producto (15) puede ser escrito a través de la siguiente fórmula de recurrencia $P^m .\delta^{(k)}(P) + \frac{(-1)^m k!}{(k-m)!} \delta^{(k)}(P) = 0$ si $k \geq m$.

La fórmula (15) es una extensión multidimensional de la fórmula $t^n .\delta^{(m)}(t)$ dada en ([3], página 55, sección 2.4, problema 10).

La fórmula (15) es una generalización de la fórmula (6) ([1], página 233) la cual aparece mencionada en el Apéndice A de ([4], fórmula 9A).

En efecto, haciendo $m=1$ en (15) y considerando (16) se tiene

$$P.\delta^{(k)}(P)+k.\delta^{(k-1)}(P)=0, \tag{24}$$

La fórmula (24) coincide con la fórmula (6) de ([1], página 233) y aparece mencionada en el Apéndice A de ([4], fórmula 9A).

En la próxima sección vamos a estudiar el producto

$$P^m.\delta^{(k)}(P) \tag{25}$$

Para el caso especial

$$P=P(x)=P(x_1,...x_n)=x_1^2+x_2^2+...x_p^2-x_{p+1}^2-...x_{p+q}^2 \tag{26}$$

donde $p+q=n$ es la dimensión del espacio.

El Producto singular $P^m.\delta^{(k)}(P)$ donde P es definida por (26).

En este parágrafo, se le da un sentido al producto singular $P^m.\delta^{(k)}(P)$ para el caso especial donde $P=P(x)$ es definida por (26).

La superficie dada por la ecuación

$$x_1^2+x_2^2+...x_p^2-x_{p+1}^2-...x_{p+q}^2=0 \tag{27}$$

define un hipercono con un punto singular (el vértice) en el origen.
De ([1], páginas 248-249), seleccionando u_i de una manera especial y considerando (5) y (13) se tiene la siguiente fórmula:

$$\left\langle \delta^{(k)}(P),\varphi \right\rangle=(-1)^k\int\left[\frac{\partial^k}{\partial P^k}\left\{\frac{1}{2}\varphi(r^2-P)^{\frac{q-2}{2}}\right\}\right]_{P=0} r^{p-1}d\Omega_p d\Omega_q dr \tag{28}$$

donde

$$r=\sqrt[2]{x_1^2+x_2^2+...x_p^2}, \tag{29}$$

$$s=\sqrt[2]{x_{p+1}^2+...+x_{p+q}^2}, \tag{30}$$

$d\Omega_p$ y $d\Omega_q$ son elementos de área de superficie de las esferas unitaria en R^p y R^q respectivamente.

Haciendo

$$\psi(r,s)=\int\varphi d\Omega_p d\Omega_q, \tag{31}$$

De (28) se tiene

$$\left\langle \delta^{(k)}(P),\varphi \right\rangle=\int_o^\infty\left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^k\left\{s^{q-2}\frac{\psi(r,s)}{2}\right\}\right]_{s=r} r^{p-1}dr \tag{32}$$

y

$$\left\langle \delta^{(k)}(P),\varphi \right\rangle=(-1)^k\int_o^\infty\left[\left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k\left\{r^{p-2}\frac{\psi(r,s)}{2}\right\}\right]_{r=s} s^{q-1}dr \tag{33}$$

([1], página 249).

En ([1], página 249), Gelfand and Shilov han usado (32) y (33) como la definición de la distribución $\delta^{(k)}(P)$ bajo la condición

$$k < \frac{p+q-2}{2}. \tag{34}$$

Por tanto, las integrales en (32) y (33) convergen bajo la condición (34).

Si, por otra parte

$$k \geq \frac{p+q-2}{2}, \tag{35}$$

se debería entender la definición de $\left\langle \delta_1^{(k)}(P), \varphi \right\rangle$ y $\left\langle \delta_2^{(k)}(P), \varphi \right\rangle$ como la regularización de (35) y (36) respectivamente([1], páginas 249-250).

Bajo la misma condición y haciendo uso del mismo método ([1], páginas 248-250), se le da un sentido a la misma fórmula de recurrencia obtenida en (15) pero ahora para el caso especial
$P = P(x) = P(x_1, \ldots x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots x_{p+q}^2$.

Teorema 2: Sea $P = P(x)$ *definida por (26),* m *entero no-negativo y* $\delta^{(k)}(P)$ *definida por la ecuación (28), entonces la siguiente fórmula es válida*

$$P^m.\delta^{(k)}(P) = \begin{cases} \frac{(-1)^m k!}{(k-m)!}\delta^{(k-m)}(P) & if\ k \geq m \\ and & \\ 0 & if\ k < m \end{cases} \tag{36}$$

bajo la condición $k < \frac{p+q-2}{2}$. *Donde* $p+q=n$ *es la dimensión del espacio.*

Demostración. De (18) y considerando (28) y (32) se tiene

$$\left\langle P^m.\delta^{(k)}(P), \varphi \right\rangle =$$

$$= (-1)^k \int \left[\frac{\partial^k}{\partial P^k} \left\{ P^m . \tfrac{1}{2} \varphi (r^2 - P)^{\frac{q-2}{2}} \right\} \right]_{P=0} r^{p-1} d\Omega_p d\Omega_q dr = \tag{37}$$

$$= \int_o^\infty \left[\left(\tfrac{\partial}{2s\partial s} \right)^k \left\{ (r^2 - s^2)^m s^{q-2} \tfrac{\psi(r,s)}{2} \right\} \right]_{s=r} r^{p-1} dr$$

si $k < \frac{p+q-2}{2}$.

Por otra parte, haciendo el cambio formal de variables

$$\begin{aligned} u &= r^2 \\ v &= s^2 \end{aligned} \tag{38}$$

En (32) y escribiendo

$$\psi(r,s) = \psi_1(u,v) \tag{39}$$

se tiene

$$\left\langle \delta^{(k)}(P), \varphi \right\rangle = \frac{1}{4} \int_o^\infty \left[\frac{\partial^k}{\partial v^k} \left\{ v^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u,v) \right\} \right]_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}} du \tag{40}$$

([1], página 250).

De (37) y considerando (38) y (39) se tiene,

$$\langle P^m . \delta^{(k)}(P), \varphi \rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \int_o^\infty \left[\frac{\partial^k}{\partial v^k} \left\{ (u-v)^m v^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u,v) \right\} \right]_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}} du \tag{41}$$

si $k < \frac{p+q-2}{2}$.

Ahora considerando la fórmula de Leibniz para la derivación de un producto se tiene:

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial v^k} \left\{ (u-v)^m v^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u,v) \right\} \right]_{v=u} =$$

$$= \begin{cases} \frac{k!(-1)^m}{(k-m)!} \left[\frac{\partial^{k-m}}{\partial v^{k-m}} \left\{ v^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u,v) \right\} \right]_{v=u} & \text{si } k \geq m \\ 0 & \text{si } k < m. \end{cases} \tag{42}$$

De (41) y (42) se tiene

$$\left\langle P^m . \delta^{(k)}(P), \varphi \right\rangle = \begin{matrix} \frac{(-1)^m k!}{(k-m)!} \left\langle \delta^{(k-m)}(P), \varphi \right\rangle & si\ k \geq m \\ y & \\ 0 & si\ k < m \end{matrix} \tag{43}$$

y $k < \frac{p+q-2}{2}$.

De (43) se obtiene la siguiente fórmula:

$$P^m . \delta^{(k)}(P) = \begin{cases} \frac{(-1)^m k!}{(k-m)!} \delta^{(k-m)}(P) & si\ k \geq m \\ and & \\ 0 & si\ k < m \end{cases} \tag{44}$$

y $k < \frac{p+q-2}{2}$, la cual coincide con (36). El producto (36) puede ser escrito a través de la siguiente fórmula de recurrencia $P^m . \delta^{(k)}(P) - \frac{(-1)^m k!}{(k-m)!} \delta^{(k)}(P) = 0$ si $k \geq m$ y $k < \frac{n}{2} - 1$. Donde $P = P(x) = P(x_1, \ldots x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots x_{p+q}^2$. Cuando $m = k$ la fórmula (36) aparece en ([5]) la cual fue probada por un método completamente diferente del que se presenta en este artículo.

REFERENCIAS

[1] I.M.Gelfand and G.L. Shilov., Generalized functions, Vol. I, Academic Press, New York, 1964.

[2] L.Schwartz., Thèorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.

[3] A.H.Zemanian., Distributions theory and Transform Analysis, International series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Books Company, 1965.

[4] C.G.Bollini, J. J. Giambiagi and J. Tiomno., Singular potentials and analytic regularization in classical Yang-Mills equations, J. Math. Phys, 20 (9), september 1979.

[5] S.E.Trione., Products between $\delta^{(k)}(m^2 + P)$ and the distributions $(m^2 + P)^k$, Preprint Nro.55, Instituto Argentino de Matemática, IAM-CONICET, Buenos Aires Argentina, 1983.

Manuel A. Aguirre, es Profesor y Decano de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar