Nexo Revista Científica
Vol.22, No.1, pp. 32-42/Agosto 2009

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
www.uni.edu.ni/Nexo

Nuevas fórmulas acerca del producto distribucional

$$(P \pm i0)^{\pm m} . L^s \{\delta(x)\}$$

Manuel A. Aguirre T.*
Núcleo Consolidado Matemática
Pura y Aplicada
Facultad de Ciencias Exactas
UNCentro, Pinto 399,
7000 Tandil,
Argentina.
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 18-Julio-2009; aceptado/accepted: 20-Agosto-2009)

RESUMEN

Se sabe que los productos distribucionales $(P \pm i0)^{+m}.L^s\{\delta(x)\}$ y $(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\}$ aparecen en ([1]) y ([9]) respectivamente sin considerar la signatura de p y q donde $p+q=n$ es la dimensión del espacio. En este artículo se obtuvieron fórmulas vinculadas con los productos distribucionales $(P \pm i0)^{+m}.L^s\{\delta(x)\}$ y $(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\}$ tomando en cuenta la signatura de p y q. Se presentan cuatro casos y la novedad aparece en el caso 4 (p y q ambos impares) porque para este caso se sabe que $\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(P \pm i0)^{\lambda} = 0$ y no es posible deducir fórmulas relacionadas con los productos $(P \pm i0)^{+m}.L^s\{\delta(x)\}$ y $(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\}$ de la misma forma que para los casos anteriores; es decir, caso 1 (p impar y q par), caso 2 (p par y q impar) y caso 3 (p y q ambos pares), por tanto fue necesario usar otro punto de vista para darle un sentido a los productos anteriores.

Palabras claves: Producto distribucional

ABSTRACT

It is known that the distributional products $(P \pm i0)^{+m}.L^s\{\delta(x)\}$ and $(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\}$ appear in ([1]) y ([9]) respectively without taking into account the signature of p and q, where $p+q=n$ is the dimension of the space. In this article a formulae relationships was obtained with the distributional products $(P \pm i0)^{+m}.L^s\{\delta(x)\}$ and $(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\}$ taking into account the signature of p and q. In order to do it we have four cases and the case 4 (p and q both odd) is very new because in this case we know that $\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(P \pm i0)^{\lambda} = 0$ and it is not possible to obtain formulae relationship with the products $(P \pm i0)^{+m}.L^s\{\delta(x)\}$ and $(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\}$ using the same method i.e. for the case 1 (p odd and q even), case 2 (p even and q odd) and case 3 (p and q both odd), therefore it is necessary to use another point of view to give a sense the distributional product $(P \pm i0)^{+m}.L^s\{\delta(x)\}$ and $(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\}$

Keywords: Distributional products

* Trabajo apoyado en parte por la Comisión de Investigaciones Científicas (C.I.C./Argentina).

INTRODUCCIÓN

Sea $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ un punto en el espacio n-dimensional. Con $P=P(x)$ se designa una forma cuadrática de n variables, no degenerada,

$$P=P(x)\overset{def}{=}x_1^2+x_2^2+...+x_p^2-x_{p+1}^2-...-x_{p+q}^2 \tag{1}$$

donde $p+q=n$ (dimensión del espacio), p es el número de cuadrados positivos de P, q es el número de cuadrados negativos de P y $def.$ es la abreviatura que indica definición.

Con $|x|^2$ se indica la forma cuadrática,

$$|x|^2=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2. \tag{2}$$

Se considera ahora la forma cuadrática

$$T_\pm(x,\varepsilon)=P(x)\pm i\varepsilon|x|^2, \tag{3}$$

con ε número real mayor que cero, $|x|^2$ definida en (2) y $P(x)$ en (1)

Para λ número complejo arbitrario se escribe,

$$(P\pm i0)^\lambda \overset{def}{=}\lim_{\varepsilon\to 0}(T_\pm(x,\varepsilon))^\lambda \tag{4}$$

se demuestra en ([4], página 284), que el límite que figura en el segundo miembro de (I.1.4) existe y además que $(P\pm i0)^\lambda$ son funciones distribucionales holomorfas de $\lambda,$ salvo en los puntos $\lambda=-\frac{n}{2}-k, k=0,1,...$ donde tienen polos simples.

De ([4],página276) se tiene,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k}(P\pm i0)^\lambda=\frac{e^{\mp\frac{q\pi i}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)}L^k\{\delta(x)\} \tag{5}$$

$k=0,1,2,..$

donde L^k es el operador ultra hiperbólico iterado k veces, definido por,

$$L^k=\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}-...-\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right\}^k. \tag{6}$$

Según ([3], página 23, fórmula (I.3.1)) se tiene,

$$(P\pm i0)^\lambda.(P\pm i0)^\mu=(P\pm i0)^{\lambda+\mu} \tag{7}$$

para λ,μ números complejos tales que, $\lambda,\mu,\lambda+\mu\neq-\frac{n}{2}-k, k=0,1,2,...$

Por otra parte, de acuerdo con ([4], página 276, fórmulas (2) y (2')) se tiene,

$$(P\pm i0)^\lambda=P_+^\lambda+e^{\pm\lambda\pi i}P_-^\lambda, \tag{8}$$

donde

$$P_+^\lambda=\begin{cases}P^\lambda \text{ si } P>0\\[2ex] 0 \text{ si } P\leq 0\end{cases} \tag{9}$$

$$P_-^{\lambda} = \begin{cases} (-P)^{\lambda} \text{ si } P < 0 \\ \\ 0 \text{ si } P \geq 0, \end{cases} \tag{10}$$

además el desarrollo en serie de Laurent de una distribución $T(\alpha)$ analítica dependiente de un parámetro α con polos simples en los puntos $\alpha = -k, k = 0,1,2,...$ está dada por:

$$T(\alpha) = \frac{A_{-1}}{\alpha + k} + A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu}(\alpha + k)^{\nu}. \tag{11}$$

La distribución A_{-1} es por definición el residuo de $T(\alpha)$ en $\alpha = -k, k = 0,1,2,...$ es decir,

$$A_{-1} = \operatorname*{Res}_{\alpha=-k} T(\alpha) = \lim_{\alpha \to -k} [(\alpha + k)T(\alpha)]. \tag{12}$$

Por otra parte, las distribuciones $P_{\pm}^{\lambda}$ tienen singularidades en los puntos de la forma $\lambda = -\frac{n}{2} - s, s = 0,1,2,...$ y $\lambda = -s, s = 1,2,...$

En general, de ([4], página 278), sabemos que

$$\delta^{(s)}(P_+) = (-1)^s s! \operatorname*{Res}_{\lambda=-s-1,\, s=0,1,2,...} P_+^{\lambda} \tag{13}$$

y

$$\delta^{(s)}(P_-) = (-1)^s s! \operatorname*{Res}_{\lambda=-s-1,\, s=0,1,2,...} P_-^{\lambda}. \tag{14}$$

Como las singularidades de $(P \pm i0)^{\lambda}$ y $P_{\pm}^{\lambda}$ en λ dependen de si la dimensión n es par o impar, es decir si p y q son impares ó pares simultáneamente entonces usando resultados de ([2]) se tiene

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s} (P \pm i0)^{\lambda} = e^{\pm\frac{q\pi i}{2}} a_{s,n} L^s\{\delta(x)\} \tag{15}$$

si p es impar y q par (n impar) ([2], página 38, fórmula 56),

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s} (P \pm i0)^{\lambda} = e^{\mp\frac{q\pi i}{2}} a_{s,n} L^s\{\delta(x)\} \tag{16}$$

si p es par y q impar (n impar) ([2], página 38, fórmula 57) donde

$$a_{s,n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{2s} s! \Gamma(\frac{n}{2} + s)} \tag{17}$$

y L^k es el operador iterado k veces definido por(6).

Para el caso n par, usando las propiedades:

$$\delta_2^{(s)}(P) - \delta_1^{(s)}(P) = -D_{s,p,q} L^{s-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \tag{18}$$

([3], página 11, fórmula 58), donde

$$D_{s,p,q} = \frac{(-1)(-1)^s (-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^{s-\frac{n}{2}+1}(s - \frac{n}{2} + 1)!} \tag{19}$$

cuando p y q son ambos pares

$$\frac{(-1)^s(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{s-\frac{n}{2}+1}(s-\frac{n}{2}+1)!}\left[\psi(\frac{q}{2})-\psi(\frac{p}{2})\right], \tag{20}$$

$$\left\langle \delta_1^k(P),\varphi\right\rangle = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^k \{s^{q-2}\,\frac{\Psi(r,s)}{2}\}\right]_{s=r} r^{p-1}dr \tag{21}$$

([4], página 250) y

$$\left\langle \delta_2^k(P),\varphi\right\rangle = (-1)^k \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \{r^{p-2}\,\frac{\Psi(r,s)}{2}\}\right]_{s=r} s^{q-1}dr. \tag{22}$$

([4], página 250), se tiene

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s}(P\pm i0)^\lambda = (-1)^{\frac{q}{2}} a_{s,n} L^s\{\delta(x)\} \tag{23}$$

si p y q son ambos pares ([2], página 38, fórmula 60) y

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s}(P\pm i0)^\lambda = 0 \tag{24}$$

([2], página 39).
En la fórmula (20) la función $\psi(x)$ es definida por

$$\psi(x) = \frac{\Gamma^{`}(x)}{\Gamma(x)}, \tag{25}$$

$$\psi(k) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1}, k = 2,3,\ldots \tag{26}$$

$$\psi(k+\frac{1}{2}) = -\gamma - 2\ln 2 + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k-1}, k = 1,2,\ldots\right) \tag{27}$$

y γ es la constante de Euler.

LOS PRODUCTOS MULTIPLICATIVOS ENTRE $(P\pm i0)^{\pm m}$ Y $L^s\{\delta\}$

El objetivo es evaluar los productos multiplicativos $(P\pm i0)^{\pm m}.L^s\{\delta\}$ tomando en cuenta las signaturas de p y q donde $p+q=n$ es la dimensión del espacio, P es la forma cuadrática definida en (1)), L^s es el operador ultrahiperbólico iterado s veces definido en (6) y $\delta(x)$ es la medida de Dirac.

En orden de darle un sentido a dichos productos se consideraron cuatro casos:

Caso 1: p impar y q par

Usando la fórmula (15), se tiene,

$$L^s\{\delta(x)\} = e^{\mp\frac{q\pi i}{2}}\left(a_{s,n}\right)^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s} (P \pm i0)^{\lambda} =$$

$$e^{\mp\frac{q\pi i}{2}}\left(a_{s,n}\right)^{-1} \lim_{\lambda\to-\frac{n}{2}-s} (\lambda + \tfrac{n}{2} + s)(P \pm i0)^{\lambda} = \tag{28}$$

$$e^{\mp\frac{q\pi i}{2}}\left(a_{s,n}\right)^{-1} \lim_{\beta\to 0} \beta(P \pm i0)^{\beta-\frac{n}{2}-s}.$$

Ahora, de (28) y usando la propiedad (7) se tiene

$$\left(P \pm i0\right)^m . L^s\{\delta(x)\} =$$

$$= e^{\mp\frac{q\pi i}{2}}\left(a_{s,n}\right)^{-1} \lim_{\beta\to 0} \beta(P \pm i0)^{\beta-(\frac{n}{2}+s-m)} = \tag{29}$$

$$\frac{4^m s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s-m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s-m)} L^{s-m}\{\delta(x)\} \text{ si } s-m \geq 0.$$

En consecuencia se tiene

$$\left(P \pm i0\right)^m . L^s\{\delta(x)\} = \frac{4^m s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s-m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s-m)} L^{s-m}\{\delta(x)\} \tag{30}$$

para p impar, q par y $s-m \geq 0.$

En forma similar de (28) se tiene

$$\left(P \pm i0\right)^{-m} . L^s\{\delta(x)\} =$$

$$= e^{\mp\frac{q\pi i}{2}}\left(a_{s,n}\right)^{-1} \lim_{\beta\to 0} \beta(P \pm i0)^{\beta-(\frac{n}{2}+s+m)} = \tag{31}$$

$$= \frac{4^{-m} s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s+m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s+m)} L^{s+m}\{\delta(x)\}.$$

para p impar y q par, donde $\left(P \pm i0\right)^{\lambda}$ es definida por (4) y cuando λ es un entero negativo el cual no es un polo, este caso ha sido estudiado por Brester y Jager ver ([7] y [8] respectivamente).

De ([7], página 577, fórmula 4.1), se tiene

$$\left(P \pm i0\right)^{-m} = P^{-m} \mp \frac{(-1)^{m-1}}{m-1)!} \pi i \delta^{(m-1)}(P) \tag{32}$$

Caso 2: p par y q impar

Este caso es similar al caso 1. En efecto, de (16) y (28) se obtienen las siguientes fórmulas

$$\left(P \pm i0\right)^m . L^s\{\delta(x)\} = \frac{4^m s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s-m)!} L^{s-m}\{\delta(x)\} \tag{33}$$

si p es par y q impar (n dimensión impar) y $s-m \geq 0,$ y

$$\left(P \pm i0\right)^{-m} . L^s\{\delta(x)\} = \frac{4^{-m} s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s+m)!} L^{s+m}\{\delta(x)\} \tag{34}$$

si p es par y q impar (n dimensión impar).

Caso3: p y q ambos pares

De (23) se tiene

$$L^s\{\delta(x)\} = \left((-1)^{\frac{q}{2}} a_{s,n}\right)^{-1} \operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s} (P \pm i0)^{\lambda} =$$

$$\left((-1)^{\frac{q}{2}} a_{s,n}\right)^{-1} \lim_{\lambda \to -\frac{n}{2}-s} (\lambda + \tfrac{n}{2} + s)(P \pm i0)^{\lambda} = \tag{35}$$

$$\left((-1)^{\frac{q}{2}} a_{s,n}\right)^{-1} \lim_{\beta \to 0} \beta (P \pm i0)^{\beta - \frac{n}{2} - s}.$$

De (28), usando (17) se tiene,

$$\left(P \pm i0\right)^m . L^s\{\delta(x)\} =$$

$$= \left((-1)^{\frac{q}{2}} a_{s,n}\right)^{-1} \lim_{\beta \to 0} \beta (P \pm i0)^{\beta - (\frac{n}{2}+s-m)} = \tag{36}$$

$$\frac{4^m s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s-m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s-m)} L^{s-m}\{\delta(x)\} \text{ si } s-m \geq 0.$$

Por tanto

$$\left(P \pm i0\right)^m . L^s\{\delta(x)\} = \frac{4^m s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s-m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s-m)} L^{s-m}\{\delta(x)\} \tag{37}$$

si p y q son ambos pares y $s-m \geq 0.$

En forma similar se obtiene

$$\left(P \pm i0\right)^{-m} . L^s\{\delta(x)\} = \frac{4^{-m} s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s+m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s+m)} L^{s+m}\{\delta(x)\} \tag{38}$$

si p y q son ambos pares.

Caso 4: p y q ambos impares

Se observa en este caso de (18) y (20) que

$$\delta_2^{(s)}(P)-\delta_1^{(s)}(P)=$$

$$=\frac{-(-1)^s(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{s-\frac{n}{2}+1}(s-\frac{n}{2}+1)!}\left[\psi(\tfrac{q}{2})-\psi(\tfrac{p}{2})\right] \tag{39}$$

para p y q ambos impares, donde $\delta_1^{(s)}(P)$ es expresada por medio de la fórmula

$$\delta_1^{(s)}(P)=\frac{-2(-1)^s(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{s-\frac{n}{2}+1}(s-\frac{n}{2}+1)!}\left[\psi(\frac{p}{2})-\psi(\frac{n}{2})\right]L^{s-\frac{n}{2}+1}\{\delta\} \tag{40}$$

si p y q son ambos impares y $\delta_2^{(s)}(P)$ por medio de la fórmula

$$\delta_2^{(s)}(P)=\frac{(-1)^{s+1}(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{s-\frac{n}{2}+1}(s-\frac{n}{2}+1)!}\left[\psi(\frac{p}{2})+\psi(\frac{q}{2})-\psi(\frac{n}{2})\right]L^{s-\frac{n}{2}+1}\{\delta\} \tag{41}$$

si p y q son ambos impares. Las fórmulas (41) y (42) son nuevas expresiones deducidas de fórmulas que aparecen en ([2]). Por otra parte de (24) se tiene que

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s}(P\pm i0)^{\lambda}=0 \tag{42}$$

si p y q son ambos impares, luego de (42) y usando la propiedad (8) se tiene

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s}P_+^{\lambda}+e^{-\pi(\frac{n}{2}+s)i}\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s}P_-^{\lambda}=0 \tag{43}$$

para p y q ambos impares. La fórmula (43) aparece en ([4], página 278, fórmula 5).

La existencia de la fórmula (42) indica que no se puede utilizar la metodología anterior para deducir los productos que se estudian. Entonces en este caso para obtener los productos $(P\pm i0)^{\pm m}\cdot L^s\{\delta\}$ se usarán las fórmulas (40), (41)

$$(P\pm i0)^m=P_+^m+(-1)^m P_-^m \tag{44}$$

([4], página 276),

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s}P_+^{\lambda}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+s-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}\delta_1^{(s)}(P)+$$

$$\frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^s s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}\left[\psi(\tfrac{p}{2})-\psi(\tfrac{n}{2})\right]L^s\{\delta\} \tag{45}$$

si p y q son ambos impares y

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s}P_-^{\lambda}=\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}\delta_2^{(s)}(P)+$$

$$\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^s s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}\left[\psi(\tfrac{p}{2})-\psi(\tfrac{n}{2})\right]L^s\{\delta\}. \tag{46}$$

si p y q son ambos impares

De (45), (46) y usando (40) y (41) se llega a la fórmula

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s} P_+^{\lambda} = -\frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^s s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}\left[\psi(\tfrac{p}{2})-\psi(\tfrac{n}{2})\right]L^s\{\delta\} \tag{47}$$

si p y q son ambos impares y

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s} P_-^{\lambda} = -\frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^s s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}\left[\psi(\tfrac{p}{2})-\psi(\tfrac{n}{2})\right](-L)^s\{\delta\}. \tag{48}$$

si p y q son ambos impares.

De (47) se tiene

$$L^s\{\delta(x)\} = b_{n,s,p,q}\operatorname*{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-s} P_+^{\lambda} = b_{n,s,p,q}\lim_{\lambda\to-\frac{n}{2}-s}(\lambda+\tfrac{n}{2}+s)P_+^{\lambda} = b_{n,s,p,q}\lim_{\beta\to 0}\beta P_+^{\beta-\frac{n}{2}-s}. \tag{49}$$

donde

$$b_{n,s,p,q} = -\frac{4^s s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}\left[\psi(\frac{p}{2})-\psi(\frac{n}{2})\right]}. \tag{50}$$

De (49) y (50) se obtiene

$$P_+^m.L^s\{\delta(x)\} = \frac{4^m s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s-m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s-m)}L^{s-m}\{\delta(x)\} \tag{51}$$

si p y q son ambos impares y $s \geq m.$

Similarmente de (48) se tiene,

$$P_-^m.(-L)^s\{\delta(x)\} = \frac{4^m s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s-m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s-m)}(-L)^{s-m}\{\delta(x)\} \tag{52}$$

De (44) y usando (51) y (52) se obtiene la siguiente fórmula

$$(P\pm i0)^m.L^s\{\delta(x)\} = P_+^m.L^s\{\delta(x)\}+(-1)^m P_-^m.L^s\{\delta(x)\} = = 2\frac{4^m s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{(s-m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s-m)}L^{s-m}\{\delta(x)\} \tag{53}$$

si p y q son ambos impares y $s \geq m.$

Por otra parte, usando (49) y usando (50) se tiene

$$P_+^{-m}.L^s\{\delta(x)\} = \frac{s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{4^m(s+m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s+m)}L^{s+m}\{\delta(x)\} \tag{54}$$

si p y q son ambos impares. En forma similar usando (48) se obtiene

$$P_-^{-m}.(-L)^s\{\delta(x)\} = \frac{s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{4^m(s+m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s+m)}(-L)^{s+m}\{\delta(x)\} \tag{55}$$

si p y q son ambos impares.

Se observa que la fórmula (32) es válida bajo la condición $m \le \frac{n}{2}-1,$ por tanto para estudiar el producto $(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\}$ bajo la condición $m > \frac{n}{2}-1,$ para p y q impares, se usará la siguiente definición:

$$P^{-m} = P_+^{-m} + (-1)^m P_-^{-m} \tag{56}$$

([9]) donde $P_\pm^{-m}$ significa parte finita de $P_\pm^\lambda$ en $\lambda = -m = 1, 2, 3, ...$ es decir

$$P_\pm^{-m} = \text{parte finita de } P_\pm^\lambda \text{ en } \lambda = -m =$$

$$= \lim_{\lambda \to -m} \tfrac{\partial}{\partial}\left(\lambda + m\right)P_\pm^\lambda \tag{57}$$

Por tanto usando (54) y (55) se tiene

$$(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\} = P_+^{-m}L^s\{\delta(x)\} + (-1)^m P_-^{-m}.L^s\{\delta(x)\} =$$

$$2\,\frac{s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{4^m(s+m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s+m)}.L^s\{\delta(x)\}\,\text{si}\, m > \tfrac{n}{2}-1, \tag{58}$$

p y q impares.

En consecuencia se ha logrado obtener el producto distribucional $(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\}$ para el caso p y q impares sin utilizar la fórmula (32), así tenemos que

$$(P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta(x)\} = 2\frac{s!\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{4^m(s+m)!\Gamma(\frac{n}{2}+s+m)}.L^s\{\delta(x)\} \tag{59}$$

si $m > \frac{n}{2}-1,$ para p y q impares.

Podemos observar que los productos distribucionales

$$(P \pm i0)^m.L^s\{\delta\} \text{ y } (P \pm i0)^{-m}.L^s\{\delta\} \tag{60}$$

aparecen en ([1]) y en ([9]) respectivamente, sin considerar la signatura de p y q. En este artículo se obtuvieron de nuevo estos productos pero haciendo el estudio detallado de los casos de la signatura de p y q donde $p+q=n$ dimensión del espacio. Por otra parte las fórmulas (53) y (59) son nuevos resultados acerca de los productos distribucionales $(P \pm i0)^{\pm m}.\ L^s\{\delta\}$.

En el caso particular $m=1, s=0$ y $n=4$ se obtiene de (38):

$$(P \pm i0)^{-1}.\delta(x) = \frac{1}{8} \Diamond \delta \tag{61}$$

donde

$$P = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \tag{62}$$

y

$$\Diamond = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \tag{63}$$

si $p = 2$ y $q = 2$ y de (59) se tiene

$$(P \pm i0)^{-1}.\delta(x) = \frac{1}{4} \Box \delta \tag{64}$$

donde

$$P = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \tag{65}$$

y

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \tag{66}$$

si $p = 1$ y $q = 3.$ En forma similar para el caso $p = 3$ y $q = 1.$

La fórmula (64) es una leve variante de la fórmula

$$(P \pm i0)^{-1}.\delta(x) = \frac{1}{2} \Box \delta \tag{67}$$

conocida como fórmula de Guerra y aparece en ([10], página 530, fórmula 26).

REFERENCIAS

[1] Aguirre, M. *Productos multiplicativos y de convolucion de distribuciones*. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

[2] Aguirre, M., & Barrenechea, A. (1999), *A relation between the k-th derivative of the Dirac delta in* $(P \pm i0)$ *and the residue of distribution* $(P \pm i0)^{\lambda}$, pp. 31-40. Journal Computational and applied Mathematics, 108.

[3] Aguirre, M. (1999), *Relations of k-yh derivatives of Dirac delta in hypercone with ulptrahyperbolic operator*, Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, Vol.6, No.2.

[4] Gelfand, I., & Shilov, G. (1964). *Generalizes functions*, Vol. I, Academic Press, New York.

[5] Trione, S. (1980). *Distributional Products*, Cursos de Matemática Nº3, Serie II, I. A. M., CONICET.

[6] Trione, S. *La integral de Riemann-Liouville*, Cursos y Seminarios de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

[7] Brester, D. (1968). *On distributions connected with quadratic forms*, pp. 563-581. S.I.A.M. J. Appl. Math. 16.

[8] Jager, E. (1968), *Applications of distributions in Mathematical Physics*, Tract. 10, Math. Centre, Amsterdam.

[9] González, A. (1980). *On some heterodox distributional multiplicative products*, pp. 180-196, Revista de la Unión Matemática Argentina 29 (3).

[10] Guerra, F. (1971), *On analytic regularization in quantum field theory*, pp. 523-535, Novo Cimento, Vol. 1 A, No 3.

Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar