

# Sobre dimensiones de Modelos de Gel'fand

Dr. José O. Araujo

NuCOMPA-Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN  
Paraje Arroyo Seco s/n, 7000, Tandil, Argentina  
Araujo, J. O. araujo@exa.unicen.edu.ar  
Paz, K. A. kapaz@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 14-Oct-2008; aceptado/accepted: 27-Marzo-2009)

## RESUMEN

En este artículo se presenta una expresión para la dimensión de un modelo de Gel'fand del grupo simétrico generalizado  $\mathfrak{S}_n^m$  o grupo de reflexiones unitarias de tipo  $G(m, 1, n)$ . De la misma se concluye que esta dimensión coincide con el número de elementos que se representan como productos de reflexiones cuyas raíces son ortogonales dos a dos.

## ABSTRACT

In this article we present the term for the expression of the Gel'fand model belonging to the generalized symmetrical group  $\mathfrak{S}_n^m$  or group of unitary consideration type  $G(m, 1, n)$ . From this we conclude that this aspect coincides with the number of elements which are represented as products of reflection the roots of which are orthogonal two to two.

### 1. Introducción.

Un *modelo de Gel'fand* para un grupo finito  $G$ , es una representación ordinaria de  $G$  cuyo carácter es la suma de todos los caracteres irreducibles de  $G$ .

Notaremos con  $\gamma(G)$  a la dimensión de un modelo de *Gel'fand* para el grupo finito  $G$ . Un resultado particularmente interesante sobre  $\gamma(G)$ , se da en la situación en que todas las representaciones irreducibles de  $G$  pueden ser realizadas sobre los números reales. En tal caso, como consecuencia del indicador de *Fröbenius-Schür*, ver [James] o [Curtis], se obtiene que  $\gamma(G)$  es igual al número de involuciones en  $G$ , es decir:

$$\gamma(G) = |\{\sigma \in G : \sigma^2 = e\}|$$

aquí las barras indican el cardinal del conjunto y  $e$  es el elemento neutro de  $G$ .

En el caso de los grupos de reflexiones euclidianas, ver [Springer], todas las representaciones de un grupo de *Weyl* pueden ser realizadas sobre los números racionales, mientras que para los grupos de *Coxeter*  $H_3$  y  $H_4$  las representaciones se realizan sobre los números reales. Naturalmente que esta información es de suma utilidad a la hora de estudiar modelos de Gel'fand para estos grupos.

En el caso del grupo simétrico generalizado o grupo de reflexiones unitarias  $G(m, 1, n)$ , las representaciones pueden realizarse sobre extensiones ciclotómicas, ver [Can, H.]

Para la teoría de grupos de reflexiones en general puede consultarse [Cohen],[Hum],[Kane] y [ShephTodd].

## 2. Construcciones de modelos de Gel'fand.

Este concepto de modelo de Gel'fand aparece hacia 1981, justamente a partir del trabajo de *Bernstein, Gel'fand y Gel'fand* en [BGG], donde presentan modelos para grupos de Lie compactos. A partir de entonces hay diversas construcciones de modelos de Gel'fand realizadas por distintos autores.

En [Klyachko], *Klyachko* presenta un modelo para  $GL_n(F_q)$  presentado con suma de caracteres inducidos. En [PanSoto], *Pantoja y Soto-Andrade* lo hacen para un grupo de Movimientos rígidos, en [IngSaxl], *Inglis y Saxl* para el grupo simétrico, en [Bad], *Baddeley* estudia modelos por involuciones, en [HZ], *Howlett y Zworestine* retoman el modelo de *Klyachko* desde un enfoque más actual.

*Kodiyalam y Verma* en [KodiyaVer], presenta una construcción particularmente simple de modelo para el grupo simétrico desarrollado sobre la potencia exterior  $K^n \wedge K^n$ . Finalmente, *Adin, Postnikov y Roichman*, en [APR1] y [APR], lo hacen para el grupo simétrico y su álgebra de Iwahori-Hecke y para el grupo simétrico generalizado.

En [AA] se introduce un espacio  $\mathcal{N}$ , en anillo de funciones polinomiales  $\mathcal{A} = K[x_1, \dots, x_n]$ , asociado con un subgrupo finito  $G$  de  $GL_n(K)$ . El espacio  $\mathcal{N}$  es un subespacio del espacio de polinomios  $G$ -armónicos, es decir del espacio:

$$\{P \in \mathcal{A} : \partial_Q(P) = 0, \forall Q \in \mathcal{A}_+^G\}$$

donde  $\mathcal{A}_+^G$  son los polinomios  $G$ -invariantes con término constante igual a cero y:

$$\partial_Q = Q(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$$

Por otra parte:

$$\mathcal{N} = \{P \in \mathcal{A} : \mathcal{D}(P) = 0, \forall D \in \mathcal{W}_+^G\}$$

donde  $\mathcal{W}_+^G$  son los operadores diferenciales  $G$ -invariantes en el álgebra de Weyl de la forma:

$$D = \sum_{\alpha, \beta} x^\alpha \partial^\beta \quad \text{con } |\alpha| < |\beta|$$

siendo:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} & \partial^\beta &= \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n} \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n & |\beta| &= \beta_1 + \cdots + \beta_n \end{aligned}$$

Cuando  $K$  es algebraicamente cerrado, la representación natural de  $G$  sobre  $\mathcal{N}$  contiene una copia de cada representación irreducible de  $G$ . Particularmente interesante es el caso en que  $G$  es un grupo de reflexiones, es conocido que si  $G$  es un grupo de reflexiones, ver [Kane], la representación de  $G$  sobre los polinomios  $G$ -armónicos es equivalente a la representación regular. Para los grupos diedrales, los grupos clásicos de tipo  $A_n, B_n, D_{2n+1}$  y para el grupo  $G(n, 1, m)$  (o grupo simétrico generalizado),  $\mathcal{N}$  es un modelo de *Gel'fand*, ver [AA1], [A], [AB] y [AB1].

En el tratamiento de los grupos de tipo  $B_n$  y  $D_n$ , se hace uso del hecho que las representaciones de un grupo de Weyl pueden ser realizadas sobre los números racionales, ver [Springer], y en consecuencia,

del conocimiento previo de la dimensión de un modelo de *Gel'fand* como el número de involuciones en el grupo.

Para un grupo diedral con  $2n$  elementos, se mantiene que  $\mathcal{N}$  un modelo de *Gel'fand* tiene por dimensión al número de involuciones en el grupo, es decir  $n+2$  o  $n+1$  según  $n$  sea par o impar. Es este caso se puede ver que  $\mathcal{N}$  en  $\mathbb{C}[x,y]$  el espacio de polinomios armónicos que son anulados por los operadores:

$$x^k \partial_y^{m-k} + y^k \partial_x^{m-k} \quad 1 \leq k \leq n$$

### 3. Producto semidirectos.

El estudio de las representaciones irreducibles en productos semidirectos de grupos, presenta un caso destacable por su simplicidad. Este es el caso de un grupo finito  $G$  que se presenta como producto semidirecto de un subgrupo normal abeliano  $D$  y un subgrupo  $H$ , es decir:

$$G = D \times_s H$$

La construcción de las representaciones irreducibles en este caso puede ser obtenida como se describe a continuación, ver por ejemplo [Serre] o [Curtis].

Con cada carácter lineal  $\chi$  de  $D$  consideramos el grupo de inercia de  $\chi$  en  $H$  dado por:

$$I_\chi = \{\eta \in H : \chi^\eta = \chi\}$$

donde:

$$\chi^\eta(d) = \chi(\eta d \eta^{-1}) \quad d \in D$$

Ahora, con cada representación irreducible  $\mu$  de  $I_\chi$ , definimos una representación  $\chi\mu$  de  $D \times_s I_\chi$  definida por:

$$\chi\mu(d, \sigma) = \chi(d)\mu(\sigma) \quad d \in D, \sigma \in I_\chi$$

Dado que  $D$  es un subgrupo normal y  $\chi$  es un carácter lineal,  $\chi\mu$  queda bien definida sobre el espacio de representación de  $\mu$ . Notamos con  $\rho_{\chi\mu}$  a la representación de  $G$  inducida por  $\chi\mu$ .

Si  $\mathcal{R}$  una familia de representantes de las  $G$ -órbitas en el espacio de caracteres lineales de  $D$ , entonces las representaciones irreducibles de  $G$  pueden ser parametrizadas como:

$$\widehat{G} = \left\{ \rho_{\chi\mu} : \chi \in \mathcal{R}, \mu \in \widehat{I_\chi} \right\}$$

donde el sombrero indica, salvo equivalencias, el conjunto de todas de representaciones irreducibles del grupo considerado.

De lo anterior resulta:

$$\begin{aligned} \gamma(G) &= \sum_{(\chi, \mu) \in \mathcal{R} \times \widehat{I_\chi}} [H : I_\chi] \mu(e) \\ &= \sum_{\chi \in \mathcal{R}} [H : I_\chi] \left( \sum_{\mu \in \widehat{I_\chi}} \mu(e) \right) \\ &= \sum_{\chi \in \mathcal{R}} [H : I_\chi] \gamma(I_\chi). \end{aligned}$$

#### 4. El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ .

En el caso del grupo simétrico, las involuciones se expresan en forma única como producto de transposiciones dos a dos disjuntas, en consecuencia éstas pueden ser agrupadas según el número de transposiciones en que se descomponen.

Para un subgrupo  $\mathfrak{H}$  de  $\mathfrak{S}_n$ , notaremos con  $\mathcal{I}_k(\mathfrak{H})$ , con  $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , al conjunto de las involuciones en  $\mathfrak{H}$  que se descomponen como producto de  $k$  involuciones dos a dos disjuntas. También usaremos  $\gamma_k(\mathfrak{H})$  para indicar el cardinal de  $\mathcal{I}_k(\mathfrak{H})$ . Sin mayor dificultad puede establecerse que:

$$\gamma_k(\mathfrak{S}_n) = \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}$$

Con cada una partición  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  de  $n$ , asociamos el *subgrupo parabólico*  $\mathfrak{S}_\lambda$  de  $\mathfrak{S}_n$  dado por:

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

donde cada  $\mathfrak{S}_{\lambda_j}$  está dado por:

$$\mathfrak{S}_{\lambda_j} = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(i) = i \text{ si } \lambda_1 + \dots + \lambda_{j-1} < i \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_j \}.$$

En virtud de la caracterización de las representaciones irreducibles de un producto cartesiano, se tiene:

**Proposición i)** Las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{S}_\lambda$  pueden ser realizadas sobre los números reales.

ii)  $\gamma(\mathfrak{S}_\lambda)$  es el número de involuciones en  $\mathfrak{S}_\lambda$  y se tiene:

$$\gamma(\mathfrak{S}_\lambda) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \gamma_k(\mathfrak{S}_\lambda).$$

#### 5. El grupo simétrico generalizado $\mathfrak{S}_n^m$ .

Como ya hemos mencionado,  $\gamma(G)$  es el número de involuciones en  $G$  en el caso de los grupos de reflexiones euclidianas. En virtud de los resultados de Carter en [Carter], en este caso, toda involución puede ser expresada como producto de reflexiones cuyas raíces forman un sistema ortogonal, de modo que resultan equivalentes ser involución y expresarse como producto de reflexiones asociadas a un sistema ortogonal de raíces.

En un grupo de reflexiones unitarias  $G$ , llamaremos *pseudo-involuciones* a los elementos en  $G$  que puedan ser expresados como producto de reflexiones asociadas a un sistema ortogonal de raíces. El resultado que presentamos en este breve artículo es el siguiente:

**Teorema 5.1.** i)  $\gamma(\mathfrak{S}_n^m)$  coincide con el número de pseudo-involuciones en  $\mathfrak{S}_n^m$ .  
ii)

$$\gamma(\mathfrak{S}_n^m) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} m^{n-k} \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}.$$

*Demostración:* Presentamos el grupo simétrico generalizado como su representación geométrica dada por las matrices monomiales en  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , cuyos coeficientes no nulos son raíces  $m$ -ésimas de la unidad. En esta situación se tiene:

$$\mathfrak{S}_n^m = \mathfrak{D} \times_s \mathfrak{S}_n$$

donde  $\mathfrak{D}$  es el grupo de matrices diagonales raíces  $m$ -ésimas de la unidad en la diagonal principal y  $\mathfrak{S}_n$  es el grupo simétrico identificado con las matrices permutacionales.

Resulta claro que el grupo de inercia de un carácter lineal de  $\mathfrak{D}$  en  $\mathfrak{S}_n$  es conjugado con un subgrupo parabólico  $\mathfrak{S}_\lambda$  para alguna partición  $\lambda$  de  $n$ . Por otra parte, cada subgrupo parabólico de  $\mathfrak{S}_n$  es el grupo de inercia en  $\mathfrak{S}_n$  de algún carácter lineal de  $\mathfrak{D}$ .

Notamos con  $\mathcal{F}_n^m$  el conjunto de funciones de  $\{1, 2, \dots, n\}$  a valores en  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Cada elemento  $\alpha \in \mathcal{F}_n^m$  induce una partición de  $n$  dada por:

$$\lambda_i^\alpha = |\alpha^{-1}(i)| \quad 0 \leq i \leq m$$

Notemos que cada carácter lineal  $\chi$  de  $\mathfrak{D}$  puede identificarse naturalmente con una función en  $\mathcal{F}_n^m$ . En este caso, dos caracteres lineales  $\chi$  y  $\phi$  de  $\mathfrak{D}$  son equivalentes si existe  $\pi \in \mathfrak{S}_n$  tal que:

$$\phi = \chi^\pi$$

pero, pensados como funciones, la identidad precedente se traduce en:

$$\alpha_\phi = \alpha_\chi \circ \pi^{-1}$$

de modo que el número de caracteres en la  $\mathfrak{S}_n$ -órbita de  $\chi$  está dado por:

$$\frac{n!}{\lambda^\chi!} = [\mathfrak{S} : \mathfrak{S}_{\lambda^\chi}].$$

De este modo, la expresión:

$$\gamma(\mathfrak{S}_n^m) = \sum_{\chi \in \mathcal{R}} [\mathfrak{S} : \mathfrak{S}_{\lambda^\chi}] \gamma(\mathfrak{S}_{\lambda^\chi})$$

puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathfrak{S}_n^m) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_n^m} \gamma(\mathfrak{S}_{\lambda^\alpha}) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\alpha \in \mathcal{F}_n^m} \gamma_k(\mathfrak{S}_{\lambda^\alpha}). \end{aligned}$$

En la suma:

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{F}_n^m} \gamma_k(\mathfrak{S}_{\lambda^\alpha})$$

cada involución  $\iota \in \mathcal{I}_k(\mathfrak{S}_n)$  aporta tantas unidades como la cantidad de subgrupos parabólicos que la contienen. Pensando de otra manera, podemos ver el número de  $\alpha \in \mathcal{F}_n^m$  tales que  $\iota \in \mathfrak{S}_{\lambda^\alpha}$ . Pero esto es:

$$m^k \times m^{n-2k} = m^{n-k}$$

dado que  $\alpha$  debe tomar valores constantes sobre ambos índices de las transposición disjuntas que interviene en la descomposición de  $\iota$ .

Se concluye que:

$$\gamma(\mathfrak{S}_n^m) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} m^{n-k} \times \gamma_k(\mathfrak{S}_n)$$

o también , en virtud de (1):

$$\gamma(\mathfrak{S}_n^m) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} m^{n-k} \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}$$

Por otra parte, resulta simple ver que tanto el número de matrices simétricas, el número de pseudo-involuciones proyectivas coincide con:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} m^{n-k} \times \gamma_k(\mathfrak{S}_n).$$

## REFERENCIAS

- [1]. Adin, R. M., Postnikov, A., Roichman, Y., *A Gelfand model for Wreath Products*, arXiv:math.RT/08022824 v1, 2008.
- [2]. Adin, R. M., Postnikov, A., Roichman, Y, *Comobinatorial Gelfand Models*, arXiv:math.RT/07093962 v2, 2008.
- [3]. Aguado, J. L. and Araujo, J. O., *A Gelfand model for the symmetric group*, Communications in Algebra, **29** (4), 1841 - 1851 (2001).
- [4]. Aguado, J. L. and Araujo, J. O., *Representations of Finite Groups on Polynomial Rings*. Actas V Congreso de Matemática Dr. Antonio R. Monteiro, 35-40 (1999) Bahía Blanca.
- [5]. Araujo, J.O., *A Gelfand model for a Weyl group of type Bn*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **44**, no. 2 (2003) 359-373.
- [6]. Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gelfand Model for the Weyl group of type D<sub>n</sub> and the*

- branching rules*  $D_n \hookrightarrow B_n$ . Journal in Algebra, vol. 294, (2005), 97-116.
- [7]. Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gelfand Model for the Symmetric Generalized Group*, por aparecer en Communications in Algebra.
- [8]. Baddeley, R., *Models and Involution Models for Wreath Products and certain Weyl Groups*. Journal of London Mathematical Society no. **44**, serie 2 (1991) 55-74.
- [9]. Bernstein, I, Gelfand, I. and Gelfand, S. *Models of representations of Lie groups*, Selected. Math. Soviet **1** (2) (1981) 121-142.
- Can, H. *Representations of the generalized symmetric groups*. Beitr. Algebra Geom. 37, No.2, 289-307 (1996).
- [1]. Carter, R. W. *Conjugacy classes in the Weyl group*. Compositio Math. 25 (1972), 159.
- [2]. Cohen, A. M. *Finite complex reflection groups*. Ann. scient. 'Ec. Norm. Sup. 9 (1976), 379-436. Erratum: ibid. 11 (1978), 613.
- [3]. Curtis, C. W. & Reiner, I. *Methods of Representation theory with Applications to Finite Groups and Orders*. Vol. I, John Wiley & Sons, 1981.
- [4]. Howlett, R. and Zworesine, C., *On Klyachkos model for the representations of finite linear groups*. China Higher Education Press (Beijing), and Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg), (2000), 229-246.
- [5]. Humphreys, J. E. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 29, Cambridge University Press, 1990.
- [6]. Inglis, N. F. J. and Saxl, J., *An explicit model for the complex representations of the finite general linear groups*, Archiv der Mathematik **57** (1991), 424-431.
- [7]. James, G. and Liebeck, M. *Representations and characters of groups*. Cambridge Mathematical Textbooks. 1993.
- [8]. Kane, R. *Reflection groups and invariant theory*. CMS Books in Mathematics 5, Springer, New York, 2001.
- [9]. Klyachko, A. A., *Models for the complex representations of the groups*  $GL(n, q)$ , Math. USSR Sbornik **48** (1984), 365379.
- [1]. Kodiyalam, V. and Verma, D.N., *A natural representation model for symmetric groups*. arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.
- [2]. Pantoja, J. and Soto-Andrade, J., *Fonctions sphériques et modèles de Gel'fand pour le groupe de mouvements rigides d'un espace paraeuclidien sur un corps local*. Comptes Rendus de L'Académie des Sciences 302, (1986), 463-466.
- [3]. Serre, J. P. *Representaciones lineales de grupos finitos*. Ediciones Omega S. A. Barcelona 1970.
- [4]. Shephard, G. C. and Todd, J. A. *Finite unitary reflection groups*. Canad. J. Math. 6 (1954), 274-304.
- [5]. Springer, T., *A Construction of Representations of Weyl Groups*. Inventiones Mathematicae 44 (1978) 279-293. Sciences **302**, (1986), 463-466.



Dr. José Orlando Araujo  
Profesor Titular  
Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas  
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

