Propiedades topológicas del Conjunto de Cantor

AUTORES: Bra. CRISTHEL RIVERA LOPEZ / Bra. AMPARO BLANDON MAIRENA / Br. REYNALDO ROMERO GONZALEZ
TUTORA: MSc. PILAR ANGELINA MARIN RUIZ Pmarin@unan.edu.ni

Palabras claves: topológias, Conjunto de Cantor, Construcción Analítica

RESUMEN

Al Matemático Alemán Georg Ferdinand Ludwing Philipp Georg F. Cantor (1845-1918) se debe la idea del "infinito continuo", es decir, la posibilidad de considerar conjuntos infinitos dados simultáneamente. Se le considera el creador de la teoría de los números irracionales y de los conjuntos. Fue un matemático alemán, inventor con Dedekind de la llamada TEORIA CONJUNTISTA, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a su denominada teoría axiomática de conjuntos, fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito, bajo la forma de números transfinitos (cardinales y ordinales). También adelantó el estudio de las series trigonométricas, fue el primero en probar la no numerabilidad de los números reales, e hizo contribuciones significantes a la teoría de la dimensión. En el presente informe se expondrá un poco del Conjunto de Cantor, el cual puede pensarse como el intermedio entre el punto y la recta: es un conjunto con muchos agujeros, de longitud nula, tiene tantos puntos como R, es auto semejante (es decir, cada una de sus partes, observada con un lente de aumento adecuado, reproduce en cierto sentido el conjunto total). Se trata de un conjunto de probada utilidad en topología, en sistemas dinámicos, en teoría de la medida, en álgebra (fracciones continuas) y es una fuente continua de contraejemplos. Este conjunto es además una curiosidad matemática, una paradoja, en el sentido usual, es decir que contradice una intuición universal relativa a tamaño de objetos geométricos.

INTRODUCCIÓN

El trabajo "PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL CONJUNTO DE CANTOR" contiene todas las demostraciones necesarias para llegar a la construcción analítica, las propiedades métricas, y así como también las propiedades topológicas de este conjunto. Aquí sólo se realiza la construcción geométrica y se define la construcción analítica del conjunto de Cantor, pero si se quiere obtener más información la pueden encontrar en el informe.

La Topología es una rama importante de las Matemáticas que estudia aquellas propiedades de los objetos geométricos que tienen que ver con la "proximidad" o la "posición relativa" entre puntos. Podríamos referirnos también a la Topología como una "geometría cualitativa", en la que se dejan a un lado nociones cuantitativas (propias de la geometría clásica) tales como longitud, ángulo, área, volumen, etc. Se centra más bien en cuestiones cualitativas como, por ejemplo, la existencia de "agujeros" (la palabra topológica que define este concepto intuitivo es "género"), de borde, o el número de componentes conexas. Se considera a Leonhard Euler como el pionero de la Topología, al resolver el famoso "problema de los puentes de Königsberg", y quien se refirió a éste como un problema de "geometriam situs" o geometría de posición. En el siglo XX se ha utilizado también el nombre "Analisis situs" o análisis de posición para referirse a la geometría de las superficies. Muchos destacan el artículo de Henri Poincaré "Analisis Situs" de 1895, como el primer estudio sistemático de la Topología, y donde se empiezan a tratar con rigor los conceptos topológicos. En el siglo XX se ha utilizado también el nombre "Analisis situs" o análisis de posición para referirse a la geometría de las superficies.

Muchos destacan el artículo de Henri Poincaré "Analisis Situs" de 1895, como el primer estudio sistemático de la Topología, y donde se empieza a tratar con rigor los conceptos topológicos.

DESARROLLO

La construcción geométrica del "Conjunto de Cantor" es la siguiente:

Dado el intervalo [0, 1], dividimos dicho intervalo en tres partes iguales y consideramos los intervalos cerrados de los extremos $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\left[\frac{2}{3},1\right]$.

El primer paso para la construcción del conjunto de Cantor consiste en quitar el subintervalo abierto intermedio, es decir quitamos (1/3; 2/3). Sea el conjunto C_1 la unión de los intervalos restantes, o sea

$C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$.

El segundo paso consiste en repetir el mismo proceso a cada uno de los intervalos que componen a C_1. En otras palabras, a cada intervalo que compone a C1 lo dividimos en tres partes iguales generándose los siguientes subintervalos: $\left[0,\frac{1}{9}\right]$, $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$, $\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]$, $\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]$, $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, $\left[\frac{8}{9},1\right]$.

Quitamos ahora los subintervalos abiertos intermedios es decir a C_1 le quitamos los intervalos abiertos $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$. Sea C_2 el conjunto que nos queda, o sea

$C_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9},1\right]$.

Repetimos el proceso, es decir, a cada uno de los intervalos que componen a C2 (que tienen longitud de 1/9) lo dividimos en tres partes iguales y quitamos los tercios medios. Con esto obtenemos el tercer paso de la construcción. Este tercer paso de la construcción, consiste en el conjunto:

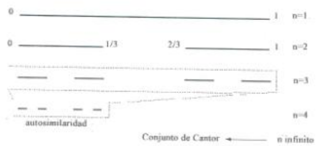
Es decir a C_2 le quitamos los intervalos $\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$ y $\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$.

Quedando C_3 de la siguiente manera:

$$C_3 = \left[0,\frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27},\frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27},\frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27},\frac{9}{27}\right] \cup \left[\frac{18}{27},\frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27},\frac{21}{27}\right] \cup \left[\frac{24}{27},\frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27},1\right]$$

Este proceso se sigue indefinidamente. Es decir para obtener a C_4 se dividen entre tres partes todos los intervalos que componen a C_3 y se quitan los Intermedios.

Esto se puede ilustrar de la siguiente manera:



Finalmente se puede observar que el conjunto de Cantor, se define como la intersección de todos los conjuntos C_m. Es decir:

$$C = \cap \{C_m : m \in \mathrm{N}\} \in \mathrm{N}$$

El problema con esta construcción es que C_{m+1} depende de C_m. Entonces, si no hemos construido a C_m no sabemos quién es C_{m+1}. Es por esa razón, que a partir de este momento, se encontró una fórmula explícita para los C_m.

CONSTRUCCIÓN ANALÍTICA DEL CONJUNTO DE CANTOR

A continuación sólo se define la construcción analítica del conjunto de Cantor: La forma analítica para cada B_m con $m \in N$ es:

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1}\left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m}\right].$$

Se demuestra que es equivalente a la construcción geométrica, además de las pruebas formales de las propiedades básicas que se mencionan en la mayoría de los libros y las propiedades topológicas principales de este conjunto.

CONCLUSIONES

- C es un conjunto cerrado y no vacío, luego compacto.

- La suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en el proceso de construcción de C es la longitud del [0,1] , es igual a 1. En ese sentido, C es un conjunto pequeño.

- C no posee puntos aislados más aún, $C^d = C$, es decir es un conjunto perfecto.

- C posee dos tipos de puntos: Los puntos de primera especie son los extremos de los intervalos abiertos eliminados durante el proceso de construcción. Se trata de una cantidad contable de puntos que son densos en el resto, son los puntos de segunda especie y es una familia no contable de puntos.

- C es totalmente disconexo.

- C es no numerable.

- C es homeomorfo a {0,2} x {0,2}x {0,2}…..es decir (C,) es homeomorfo al espacio, producto de una familia numerable de espacios discretos {{0,2}, }.

- C es la unión disjunta de dos copias de si mismo, es decir, es auto semejante.

BIBLIOGRAFÍA

- S.S. Cairns, "Introductory Topology", Ronald Press, 1968.

- S.C. Carlson, "Topology of surfaces, knots and manifolds: a first undergraduate course", Wiley John and Sons, 2001.

- J. R. Munkres. "Topología" Prentice Hall. 2da Edición Madrid, España, 2002.

- Walter Rudin. Principios de Análisis Matemático. Mcgraw-Hill, 1980.

- M. Macho Stadler. Topología General, Editorial Universitaria. Managua Nicaragua, 2002.